# Livre du professeur - Mathématiques
# Chapitre 1 : Combinatoire et dénombrement

## Table des matières

# 1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. précise les enjeux de ce chapitre comme suit : « Il s'agit ainsi d'enrichir le vocabulaire ensembliste des élèves et d'offrir une initiation aux mathématiques discrètes, qui jouent un rôle important dans le développement de l'informatique. »
Ce travail sur des mathématiques discrètes a été abordé en classe de Première par le biais des suites. Aussi, des rappels sur ces notions sont proposées en tout début de chapitre.
De nombreux exercices de début de chapitre se veulent plutôt théoriques : en effet, il est important pour les élèves de maîtriser les différentes notions en jeu dans le cadre du dénombrement, de savoir distinguer les diverses situations et les outils qui leur sont associés. Ces exercices permettent également de s'entraîner à démontrer, en utilisant un large panel de techniques : contraposées, déduction et raisonnement par récurrence. Ces méthodes serviront tout au long de l'année en classe de Terminale. Ce chapitre est également l'occasion d'introduire la notation Sigma des sommes.
Suivent alors les exercices d'application qui font intervenir des domaines très variés et ne se restreignent pas aux simples mathématiques. Si le chapitre sur les probabilités s'inspirera fortement du chapitre sur le dénombrement, les élèves suivant la spécialité Numérique et Sciences informatiques, par exemple, verront de nombreux liens avec cette deuxième matière (arbres binaires et graphes...).

# 2 Avant de commencer

## 2.1 Corrigés des exercices

**Corrigé exercice 1 :**

1. $u_0 = 2\times 0^2 - 1 = -1$ $u_1 = 2\times 1^2 - 1 = 1$ $u_2 = 2\times 2^2 - 1 = 7$ $u_3 = 2\times 3^2 - 1 = 17$
2. $u_0 = -2$ $u_1 = u_0^2 = (-2)^2 = 4$ $u_2 = u_1^2 = 4^2 = 16$ $u_3 = u_2^2 = 16^2 = 256$
3. $u_0 = 1$ $u_1 = 2u_0 - 3\times 0 = 2\times 1 - 0 = 2$ $u_2 = 2u_1 - 3\times 1 = 2\times 2 - 3 = 1$ $u_3 = 2u_2 - 3\times 2 = 2\times 1 - 6 = -4$

**Corrigé exercice 2 :**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 4(n+1) - 3 = 2(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4 - 3 = 2n^2 + 8n + 3$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n+1+3} = \dfrac{2n+2}{n+4}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{3(n+1)^2 + 2(n+1) + 7} = \dfrac{3^{n+1}}{3n^2 + 6n + 3 + 2n + 2 + 7} = \dfrac{3^{n+1}}{3n^2 + 8n + 12}$.

**Corrigé exercice 3 :**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3} = \dfrac{n+3}{(n+1)(n+3)} - \dfrac{n+1}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} \times \dfrac{n+2}{n+3} = \dfrac{n}{n+3}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^2-4}{n+2} = \dfrac{(n+2)(n-2)}{n+2} = n-2$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{(n+2)^2} - \dfrac{n}{n+2} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)^2} - \dfrac{n(n+2)}{(n+2)^2} = \dfrac{-n}{(n+2)^2}$.

**Corrigé exercice 4 :**

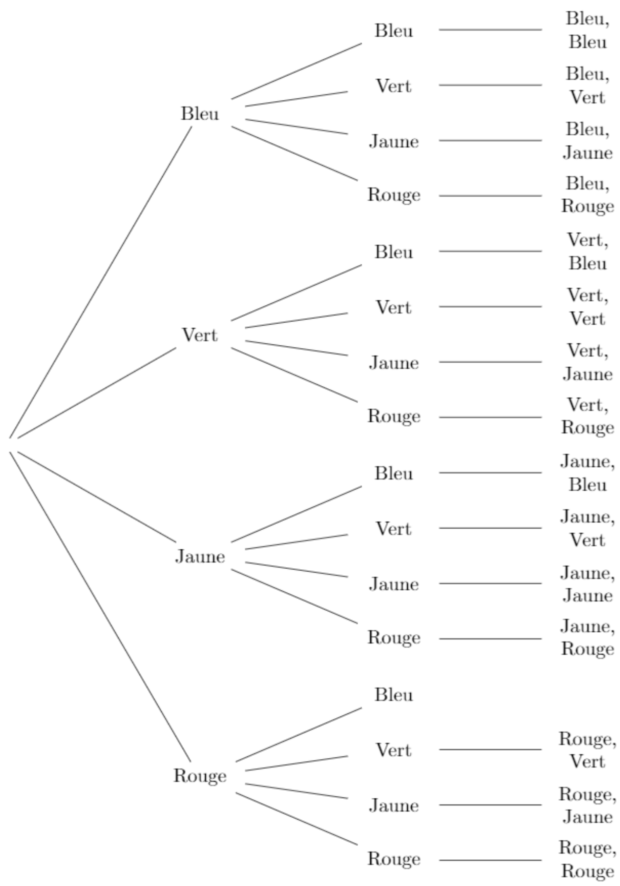
1. L'événement A est réalisé par les issues 2, 4 et 6. L'événement B est réalisé par les issues 3, 4, 5 et 6.

2. $A \cup B$ : le nombre est pair OU est supérieur ou égal 3. Cet événement est réalisé par les issues 2, 3, 4, 5 et 6. Cela revient ici à dire que le nombre obtenu est supérieur ou égal à 2. L'événement $A \cap B$ (le nombre est pair ET supérieur ou égal à 3) est réalisé par les issues 4 et 6.

3. Les événements $C = \{1; 2\}$ et $D = \{4; 5\}$ conviennent.

**Corrigé exercice 5 :**

1. a. Au premier tirage, la boule tirée peut être bleue, verte, jaune ou rouge. Puisqu'on remet la boule, au second tirage, les mêmes choix de couleurs sont possibles. On obtient alors l'arbre suivant montrant les 16 possibilités.

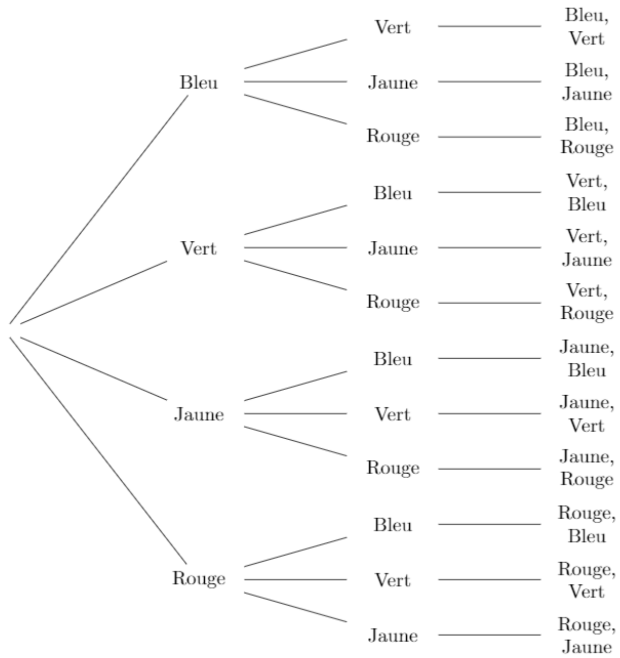


b. On notera respectivement B, V, J, R si la boule est de couleur bleue, verte, jaune ou rouge. Les issues sont BB, BV, BJ, BR, VB, VV, VJ, VR, JB, JV, JJ, JR, RB, RV, RJ, RR.

2. a. Les issues BB, BJ, BR, JB, JJ, JR, RB, RJ et RR réalisent l'événement "la boule verte n'a pas été tirée". Il y a donc neuf issues qui réalisent cet événement.

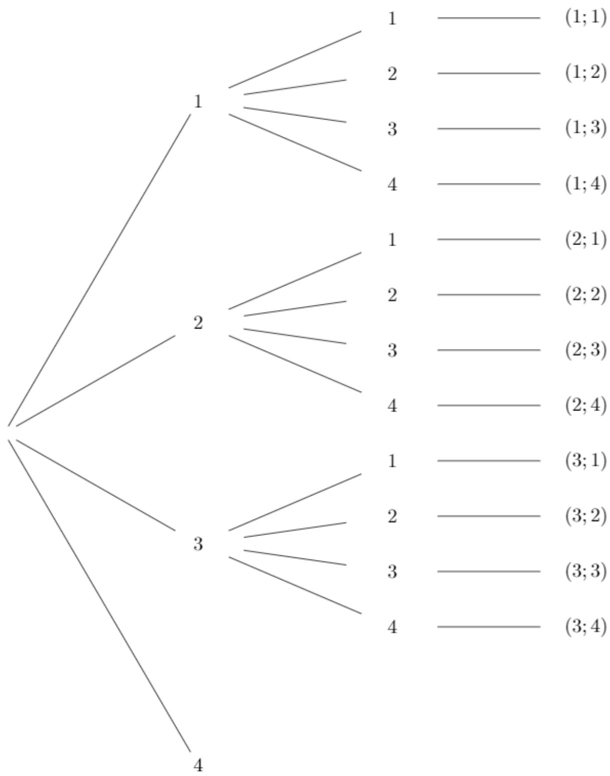
   b. L'issue JJ réalise l'événement "la boule jaune a été tirée deux fois". Il y a donc une seule issue qui réalise cet événement.

3. Cette fois, on ne remet pas la boule dans l'urne. Donc, la même couleur ne peut pas apparaître lors du premier et du second tirage. Il n'y a donc plus que 12 possibilités (arbre ci-après).

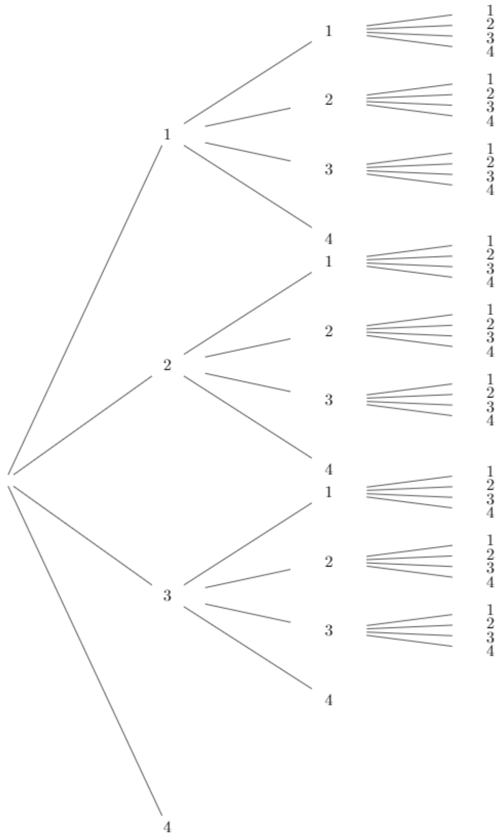



**Corrigé exercice 6 :**

1. Il y a 13 issues à cette expérience aléatoire.




2. Parmi les 13 issues, 9 n'aboutissent pas à un 4 et demanderont donc un lancer supplémentaire, donnant 4 fois plus de possibilités, soit 36 issues. Les 4 autres ne donnent pas de nouvelle possibilité. Le nombre d'issues est donc $36 + 4 = 40$. L'arbre des possibilités est le suivant mais il commence à être trop imposant pour être dessiné, il est donc préférable d'utiliser des arguments de dénombrement.




3. On a vu que $u_1 = 4$, $u_2 = 13$ et $u_3 = 40$.

4. On raisonne selon les résultats du premier dé.

   - Si le résultat est 1, 2, ou 3, on répète l'expérience qui consiste à lancer $n-1$ fois le dé au maximum. Le nombre d'issues dans chacun de ces trois cas est $u_{n-1}$.
   - Si le résultat est 4, on ne relance pas le dé, cela ne fait qu'une issue supplémentaire. On aboutit à la relation $u_n = 3u_{n-1} + 1$ valable pour tout $n \geqslant 1$.

5. On a ainsi :

   - $u_4 = 3u_3 + 1 = 3 \times 40 + 1 = 121$
   - $u_5 = 3u_4 + 1 = 3 \times 121 + 1 = 364$
   - $u_6 = 3u_5 + 1 = 3 \times 364 + 1 = 1093$
   - $u_7 = 3u_6 + 1 = 3 \times 1093 + 1 = 3280$

# 3 Activités

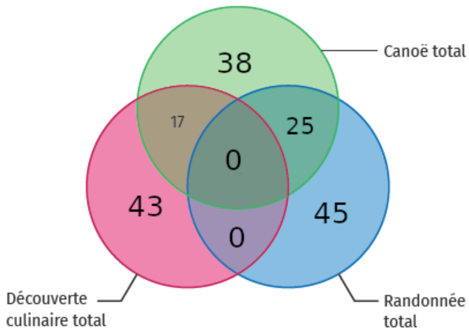
## 3.1 Corrigé activité A :

**Questions :**

1. Si le vacancier décide de faire 0 activité ou 3 activités, cela fait 2 possibilités. Si le vacancier décide de ne faire qu'une activité, il a alors 3 choix possibles. Enfin, si le vacancier décide de faire 2 activités parmi les trois, il a 3 paires de choix possibles. Au final, il existe 8 programmes différents.

2. En faisant la somme des inscrits, on obtient $70 + 80 + 60 = 210$. Or, il n'y a que 180 vacanciers. Certains sont donc inscrits à plusieurs activités.

3. a. Puisque 80 personnes sont inscrites au canoë et que, parmi elles, 17 sont aussi inscrite à la découverte culinaire, il en reste donc 63. Parmi elles, 25 se sont inscrites à la randonnée. Cela fait donc 38 personnes inscrites uniquement au canoë. Des soustractions nous permettent d'obtenir les autres valeurs.




   b. Sur ce diagramme, on compte $45 + 25 + 43 + 38 + 17 = 168$ personnes. 12 personnes ne sont donc inscrites à aucune activité.

4. On obtient $\text{Card}(C) = 38+17+25 = 80$ ; $\text{Card}(R) = 45+25 = 70$ ; $\text{Card}(R\cup D) = 45 + 25 + 43 + 17 = 130$ et $\text{Card}(C \cup D) = 38 + 25 + 17 + 43 = 123$.

5. On remarque que $\text{Card}(R) + \text{Card}(D) = \text{Card}(R \cup D)$.

6. Une telle relation n'existe pas pour $\text{Card}(C)$, $\text{Card}(D)$ et $\text{Card}(C \cup D)$ puisque des personnes participent aux deux activités de canoë et de découverte culinaire.

7. Il y a 80 choix pour le prix en canoë, 70 en randonnée et 60 en découverte culinaire. Le nombre de triplets qui peut être formé est donc de $80 \times 70 \times 60 = 336\,000$.

**Bilan :**

1. Il y a $\text{Card}(A)$ choix pour le premier nombres et $\text{Card}(B)$ choix pour le deuxième. La cardinal du produit cartésien de $A$ et $B$ est donc $\text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

2. Le produit cartésien de trois ensemble $A$, $B$, et $C$ est l'ensemble des triplets $(x; y; z)$ avec $x \in A$, $y \in B$ et $z \in C$. Son cardinal vaut $\text{Card}(A) \times \text{Card}(B) \times \text{Card}(C)$.

3. Plus généralement, le produit cartésien de $A_1$, $A_2$, … $A_n$ est l'ensemble des $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in A_i$ pour tout $i$ entre 1 et $n$. Le cardinal de ce produit cartésien est égal au produit des cardinaux des ensembles $A_i$ pour $i$ allant de 1 à $n$.

## 3.2 Corrigé activité B :

**Questions :**

1. a. Pour la première boule, on a 4 possibilités. Pour chacune d'elle, on a 4 possibilités pour la deuxième boule et, pour chacune de ces possibilités, on a 4 possibilités pour la dernière boule. Cela nous donne $4^3 = 64$ issues possibles.
   b. Si la première boule tirée n'est pas verte, alors il n'existe plus que 3 choix possibles au premier tirage. On a alors $3 \times 4 \times 4 = 48$ issues correspondant au résultat “la première boule tirée n'est pas verte”.
   c. $64 - 48 = 16$ issues correspondent au résultat “la première boule tirée est verte”.
2. a. Les issues $(V; V; R)$, $(J; B; J)$ et $(R; R; R)$ ne peuvent plus êtres obtenues s'il n'y a pas de remise. Une même couleur ne peut plus apparaître 2 fois.
   b. Cette fois, nous avons 4 choix pour la première boule, puis 3 choix pour la deuxième et enfin 2 choix pour la dernière. Il y a donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ issues possibles.
   c. Si la première boule tirée n'est pas bleue, alors il reste $3 \times 3 \times 2 = 18$ issues possibles.

**Bilan :**

Dans le cas d'un tirage avec remise, $n$ boules sont constamment à disposition. Chaque tirage se fait donc avec $n$ boules, ce qui multiplie le nombre de possibilités par $n$ à chaque fois. Les issues sont au nombre de $n^k$. En revanche, s'il n'y a pas de remise, le nombre de boules disponibles diminue de 1 à chaque fois. Il y en a $n$ pour le premier tirage, $n-1$ pour le suivant et ainsi de suite jusqu'à $n-k+1$. Le nombre d'issues est donc $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

## 3.3 Corrigé activité C :

**Questions :**

1. a. Il y a 10 choix pour la première carte.
   b. Une fois la première carte tirée, il ne reste plus que 9 cartes parmi lesquelles on en tire une nouvelle.
   c. Il restera donc 8 cartes pour le dernier tirage. Le nombre de tirages possibles est donc $10 \times 9 \times 8 = 720$.
2. a. Les tirages avec ordre $(1; 3; 5)$, $(1; 5; 3)$, $(3; 5; 1)$, $(3; 1; 5)$, $(5; 1; 3)$ et $(5; 3; 1)$ mènent au tirage sans ordre $\{1; 5; 3\}$. Il y en a 6.
   b. Il y a 720 tirages avec ordre possible. Cependant, chaque tirage sans ordre correspond à 6 tirages avec ordre, le nombre de tirage sans ordre est donc 6 fois moins grand. Il est donc égal à $\dfrac{720}{6} = 120$.

c. Si on note $O$ le nombre de tirages tenant compte de l'ordre et $P$ le nombre de tirages ne tenant pas compte de l'ordre, on a $O = 6P$.

**Bilan :**

On peut effectuer $\dfrac{n(n-1)...(n-k)}{k(k-1)...1}$ tirages différents. Si on connaît la notation factorielle, on peut aussi l'écrire $\dfrac{n!}{k!}$.

# 4 Auto-évaluation

**Corrigé exercice 7 :**

On a ici un tirage avec ordre et sans remise de 5 éléments parmi 5.
$\boxed{\text{Réponse b}}$

**Corrigé exercice 8 :**

On a 17 possibilités pour le garçon et 12 pour la fille. Il s'agit du produit cartésien de deux ensembles dont un a 17 éléments et l'autre 12.
$\boxed{\text{Réponse a.}}$

**Corrigé exercice 9 :**

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3} = 2 \times 5 = 10$
$\boxed{\text{Réponse c.}}$

**Corrigé exercice 10 :**

C'est un tirage sans remise avec ordre, il y a donc 12 possibilités pour la première carte, 11 pour la deuxième, 10 pour la troisième, etc. soit $12 \times 11 \times 10 = \frac{12!}{9!}$ tirages différents.
$\boxed{\text{Réponse b.}}$

**Corrigé exercice 11 :**

On rappelle que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
$\boxed{\text{Réponses b et d.}}$

**Corrigé exercice 12 :**

On a une union disjointe, on ajoute donc $\binom{11}{4}$ et $\binom{11}{5}$. Par ailleurs, la relation de Pascal nous dit que la somme de ces termes vaut $\binom{12}{5}$.
$\boxed{\text{Réponses b et c.}}$

**Corrigé exercice 13 :**

Il faut que les 4 éléments soient présents une seule fois. Dans la réponse b, on en compte seulement 3. La réponse c est un ensemble et non un $n$-uplet.
$\boxed{\text{Réponses a et d.}}$

**Corrigé exercice 14 :**

On a 6 possibilités pour le premier chiffre, 5 pour le deuxième, 4 pour le troisième et 3 pour le quatrième, soit $6 \times 5 \times 4 \times 3$. Ceci peut se réécrire $\dfrac{6!}{2!}$.

$\boxed{\text{Réponses b et d.}}$

**Corrigé exercice 15 :**

1. a. Si le tirage est effectué avec remise, il y a 9 choix possibles pour chaque chiffre, soit $9^3 = 729$ nombres possibles.

   b. Un nombre est pair si et seulement si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8. Ici, le 0 n'est pas disponible, ce qui ne laisse que 4 possibilités pour le dernier chiffre. Les deux premiers n'ont aucune restriction. Il y a donc $9 \times 9 \times 4 = 324$ nombres pairs constructibles.

2. a. On peut construire $9 \times 8 \times 7 = 504$ nombres différents.

   b. Si le chiffre 7 est interdit, cela laisse 8 possibilités pour le premier chiffre, 7 pour le deuxième et 6 pour le troisième, soit $8 \times 7 \times 6 = 336$ possibilités.

   c. On va répartir ces cas selon le dernier chiffre du nombre : - si le dernier chiffre est 5, il y a 8 possibilités pour le premier chiffre et 7 pour le deuxième, soit 56 possibilités ; - le même raisonnement est valable si le dernier chiffre est 8. Il y a donc en tout 112 nombres constructibles ayant 5 ou 8 comme dernier chiffre.

3. a. On fait un choix simultané de 3 boules parmi 9. Il y a donc $\dbinom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ tirages possibles.

   b. Si l'on interdit les numéros 3 et 6, il ne reste plus que 7 nombres parmi lesquels on en tire 3, soit $\dbinom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$ possibilités.

   c. Si le numéro 2 est tiré mais pas le numéro 4 ou le numéro 6, il reste 2 numéros à tirer parmi 6 restants, soit $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ combinaisons.

# 5 TP/TICE

## 5.1 Corrigé du TP 1

### Questions préliminaires

1. Une permutation d'un ensemble à $n$ éléments est un $n$-uplet d'éléments distincts de cet ensemble.
2. Il existe $n!$ permutations d'un ensemble à $n$ éléments.

### Méthode 1

```
1  from random import *
2
3  def permutation_alea(n):
4      liste=list(range(1,n+1))
5      resultat=[]
6      for i in range(n):
7          choix = choice(liste)
8          resultat.append(choix)
9          liste.remove(choix)
10     return resultat
```

On est certain d'avoir ainsi une permutation :

- la ligne 6 nous assure d'avoir un $n$-uplet puisque l'on aura choisi $n$ éléments ;
- la ligne 9 assure que ces éléments sont distincts : chaque élément, une fois choisi, est retiré de la liste des possibilités.

### Méthode 2

1. Manipulation au tableur
2. a. La fonction ALEA() permet de générer aléatoirement un nombre entre 0 et 1.
   b. Manipulation au tableur
3. Manipulation au tableur (les nombres sont obtenus de façon aléatoire donc, évidemment, les élèves n'obtiendront pas le même classement que dans la capture d'écran du manuel).
4. La permutation se situe dans la colonne C. On a bien tous les nombres de 1 à 10 qui sont présent une et une seule fois.

### Pour aller plus loin

Il y a plusieurs méthodes pour être certain d'obtenir une permutation sans point fixe.
La première est de créer une fonction qui prend en entrée une permutation et qui renvoie un booléen : True si la permutation a un point fixe, False sinon.

```python
def pointfixe(l):
    for i in range(len(l)):
        if l[i]==i+1:
            return True
    return False
```

Cette fonction regarde s'il y a un point fixe et renvoie True dès qu'elle en voit un. Si elle n'en voit aucun, elle renvoie False.
À partir de cette nouvelle fonction et de la précédente, on peut alors en construire une troisième :

```python
def permutation_sans_fixe(n):
    fixe=True
    while fixe:
        l=permutation_alea(n)
        fixe=pointfixe(l)
    return l
```

Un approfondissement pourrait alors être le suivant : quelle est la probabilité qu'une permutation prise uniformément au hasard n'ait pas de point fixe (on appelle une telle permutation un "dérangement") ?
Lorsque $n$ tend vers l'infini, cette probabilité tend vers $\frac{1}{\mathrm{e}}$.
Une autre possibilité est de considérer la permutation comme un cycle. Par exemple, pour la permutation $(2; 4; 3; 1)$, on considère que le numéro 2 renvoie au numéro 4, qui renvoie au 3, qui renvoie au 1, qui renvoie au 2. Il est alors impossible d'avoir un point fixe puisque chaque nombre n'apparaît qu'une fois dans le n-uplet. Cette représentation peut alors déboucher sur le calcul du nombre de cycle de longueur $n$.

## 5.2 Corrigé du TP 2

### Questions préliminaires

1. Les coefficients de la première colonne et de la diagonale valent 1 : on a en effet, pour tout entier $n$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

2. On construit ainsi les 5 première lignes du triangle de Pascal en utilisant la relation vue dans le cours. $\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$

### Méthode 1

1. La colonne C ne contient que des 1.

2. On doit entrer la formule =C4+D4.

3. On obtient le résultat suivant.

| | | k | | | | | | | | | Somme |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| n | 0 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | 2 |
| | 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | 4 |
| | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | 8 |
| | 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | 16 |
| | 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | 32 |
| | 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | 64 |
| | 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | 128 |
| | 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | 256 |

4. On retrouve que la somme des coefficients binomiaux de la ligne $n$ est égale à $2^n$.

## Méthode 2

1., 2. et 3. voici le code.

```
1  def pascal(n):
2      l=[[0]*n for x in range(n)]
3      for i in range(n):
4          for j in range(n):
5              if j == 0:
6                  l[i][j]=1 #met les coefficients de la première colonne à 1
7              elif j==i:
8                  l[i][j]=1 #met les coefficients de la diagonale à 1
9              else :
10                 l[i][j]=l[i-1][j-1]+l[i-1][j]
11     return l
```

Pour la ligne 10, on utilise la relation de Pascal. Le coefficient $l[i][j]$ est égal à $\binom{i}{j}$. On a ainsi $\binom{i}{j} = \binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j}$, c'est-à-dire $l[i][j] = l[i-1][j-1] + l[i-1][j]$
4. On pourra par exemple compléter le programme de la façon suivante.

```
n = 7
p = pascal(n+1)

S = 0
for j in range(n+1):
    S = S + p[n][j]

print(S)
```

Il faut faire attention que pour $n = 7$, on a doit alors avoir 8 lignes (de $n = 0$ jusqu'à $n = 7$.).

### Pour aller plus loin

On note $P(n)$ la proposition “Pour tous réels $a$ et $b$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$”. Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1, $P(n)$ est vraie. Pour $n = 1$ : $a + b = \binom{1}{0} a^0 b + \binom{1}{1} ab^0$. $P(1)$ est vraie. Supposons qu'il existe un entier naturel $n$ tel que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est alors vraie. Soient $a$ et $b$ deux réels.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}
\end{aligned}$$

En posant $j = k+1$ dans la première somme et en posant $j = k$ dans la seconde, on a alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}a^j b^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j b^{n-j+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^j b^{n-j+1} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}a^n b^{n-j+1} \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right)a^j b^{n-j+1} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Pascal, qui affirme que $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$, puis en regroupant les termes à l'extérieur de la somme, on trouve bien

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j}.$$

$P(n+1)$ est donc vraie. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ non nul.

# 6 Exercices d'applications directes

## 6.1 Exercices à l'oral

**Corrigé exercice 16 :**

Les ensembles étant disjoints, on a $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 7 + 4 = 11$ et $\text{Card}(A \cap B) = 0$. De plus, $\text{Card}(A \cap B) = 0$, $\text{Card}(A \times B) = 7 \times 4 = 28$, $\text{Card}(A^2) = 7^2 = 49$ et $\text{Card}(B^3) = 4^3 = 64$.

**Corrigé exercice 17 :**

On sait que $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ et $2! = 2 \times 1 = 2$. Ainsi, $M = 3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$
$N = (3 \times 2)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
$P = 3! + 2! = 6 + 2 = 8$
$Q = (3 + 2)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

**Corrigé exercice 18 :**

$R = \dfrac{5!}{4!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{5 \times 4!}{4!} = 5$
$S = \dfrac{8!}{10!} = \dfrac{8!}{8! \times 9 \times 10} = \dfrac{1}{90}$
$T = \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$
$U = \dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 10100$

**Corrigé exercice 19 :**

1. Pour chaque position, il y a 5 choix différents. On peut donc écrire $5^5 = 3\,125$ mots.
2. Il y a 5 choix pour la première lettre, 5 pour la deuxième, 5 pour la troisième, soit un total de mots de $5^3 = 625$.
3. Si l'on ne peut pas reprendre deux fois la même lettre cela donne :
   - Pour le mot de 5 lettres, 5 possibilités pour la première lettre, 4 pour la deuxième, 3 pour la troisième, 2 pour la quatrième et 1 pour la dernière, soit $5! = 120$ mots possibles.
   - Pour le mot de 3 lettres, il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités.

**Corrigé exercice 20 :**

$V = \dbinom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$
$W = \dbinom{4}{3} = 4$
$X = \dbinom{7}{1} = 7$
$Y = \dbinom{6}{3} = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6 \times 3!} = 20$

**Corrigé exercice 21 :**

- $(1;1;3;4;2)$ est un 5-uplet d'éléments de $A$.
- $(1;3;2)$ est un 3-uplet d'éléments de $A$. Les éléments étant distincts, c'est également un 3-arrangement.
- Puisque $5 \notin A$, $(1;5;2;4)$ ne correspond à rien de ce qui a été vu ce chapitre.
- $\{3;1\}$ est une partie de $A$ à 2 éléments et une combinaison de $A$ à 2 éléments.
- $(4;3;2;1)$ est un 4-uplet d'éléments de $A$. Les éléments étant distincts, c'est également un 4-arrangement. Puisque $\text{Card}(A) = 4$, c'est aussi une permutation.
- Puisque $5 \notin A$, $\{5;2\}$ ne correspond à rien de ce qui a été vu ce chapitre.
- $\varnothing$ est une combinaison à 0 élément de $A$ et une partie de $A$.

**Corrigé exercice 22 :**

Plusieurs résolutions sont envisageables :

- Pour un tintement de verre, il faut prendre 2 invités parmi les 12. Le nombre de tintements de verre est donc de $\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$.
- Chacun des 12 invités trinque avec les 11 autres. On peut donc constituer $12 \times 11 = 132$ paires d'invités. Seulement, en faisant ainsi, chaque paire est comptée deux fois. Il y a donc $\frac{132}{2} = 66$ tintements de verre.

## 6.2 Exercices

**Corrigé exercice 23 :**

$A \cup B = \{5;7;8;14;21;25;123\}$ $A \cap B = \{7;14\}$

**Corrigé exercice 24 :**

On a $B = \{1;2;5;10;11\}$.

**Corrigé exercice 25 :**

Puisque $A$ et $B$ sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 8 + 11 = 19$. Par ailleurs $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 8 \times 11 = 88$.

**Corrigé exercice 26 :**

Puisque $A$ et $B$ sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, soit $\text{Card} B = \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(A) = 32 - 20 = 12$. Par ailleurs, $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 20 \times 12 = 240$.

**Corrigé exercice 27 :**

Puisque $\text{Card}(A\times B) = \text{Card}(A)\times\text{Card}(B)$, on a alors $\text{Card}(B) = \dfrac{\text{Card}(A\times B)}{\text{Card}(A)} = \dfrac{108}{9} = 12$. De plus, $A$ et $B$ étant disjoints, $\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 9 + 12 = 21$.

**Corrigé exercice 28 :**

1. Ici, $\text{Card}(A) = 5$ et $\text{Card}(B) = 2$. On a donc $\text{Card}(A\times B) = 5\times 2 = 10$.
2. Les éléments de $A\times B$ sont $(m;0)$, $(m;1)$, $(a;0)$, $(a;1)$, $(t;0)$, $(t;1)$, $(h;0)$, $(h;1)$, $(s;0)$, $(s;1)$. On en trouve bien 10.

**Corrigé exercice 29 :**

1. Il y a $256^4$ adresses IPv4 possibles, soit 4 294 967 296, ce qui est insuffisant pour identifier 5 milliards d'ordinateurs de manière unique.
2. Il existe $256^6$ adresses IPv6, soit environ $2,8\times 10^{14}$ adresses soit approximativement deux cent mille milliards d'adresse.

**Corrigé exercice 30 :**

1. Un numéro de téléphone est composé de 10 chiffres. Il existe donc $10^7$ numéros commençant par 06 7 et $10^7$ numéros commençant par 8 (10 possibilités pour chacun des 7 chiffres restants à chaque fois). Pour cette tranche, Orange dispose donc de $2\times 10^7$ numéros.
2. Il existe $10^6$ numéros commençant par 06 58. Il en est de même pour les nombres commençant par 06 59, 06 60, ... , 06 68, ce qui donne $11\times 10^6$ soit 11 millions de numéros. De plus, pour les numéros commençant par 06 69, il y a 8 possibilités pour le premier chiffre et 10 pour les 5 restants, soit $8\times 10^5 = 800\,000$ possibilités. Au total, ce sont donc 11 800 000 numéros qui sont attribués à Bouygues Télécom sur cette tranche.

**Corrigé exercice 31 :**

1. Pour $n = 2$, il y a $4^2 = 16$ possibilités. Pour $n = 3$, il y en a $4^3 = 64$. C'est insuffisant pour en avoir 1000.
2. On cherche le premier entier naturel $n$ pour lequel $4^n \geqslant 1000$. On a $4^4 = 256$ et $4^5 = 1024$, la réponse est 5. Si le logarithme népérien a été vu, il est possible d'aborder cette question différemment en remarquant que $4^n \geqslant 1000 \Leftrightarrow n\ln(4) \geqslant \ln(1000)$ par croissance du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $\ln(4) > 0$, cela revient à $n \geqslant \dfrac{\ln(1000)}{\ln(4)} \approx 4,98$, et donc $n = 5$.

**Corrigé exercice 32 :**

1. $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1}{(n+2)(n+1)} = n!$

2. $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{(n+2)\times(n+1)\times n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1}{(n+2)(n+1)} = n!$

3. $\dfrac{(n+5)!}{(n+7)!} = \dfrac{(n+5)!}{(n+7)(n+6)\times(n+5)!} = \dfrac{1}{(n+7)(n+6)}$

**Corrigé exercice 33 :**

1. $\dfrac{1}{3\times 2\times 1} = \dfrac{1}{3!}$
2. $5\times 3\times 2\times 4 = 5!$
3. $8\times 7\times 6 = 8\times 7\times 6\times \dfrac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = \dfrac{8!}{5!}$
4. $\dfrac{1}{13\times 14} = \dfrac{12!}{14\times 13\times 12!} = \dfrac{12!}{14!}$

**Corrigé exercice 34 :**

C'est faux : $0! = 1! = 1$.

**Corrigé exercice 35 :**

1. Les arrangements à deux éléments de $A$ sont $(b;i)$, $(b;e)$, $(b;n)$, $(i;b)$, $(i;e)$, $(i;n)$, $(e;b)$, $(e;i)$, $(e;n)$, $(n;b)$, $(n;i)$, $(n;e)$.
2. Il y a $4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$ permutations de $A$

**Corrigé exercice 36 :**

1. Il y a $8\times 7\times 6 = 336$ arrangements à 3 éléments de $A$.
2. Il y a 8 arrangements de $A$ à un élément.
3. Il y a $8! = 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 40320$ permutations de $A$.

**Corrigé exercice 37 :**

1. Un classement est une permutations de l'ensemble des huits coureurs. Il en existe $8! = 40320$.
2. Un podium est un 3-arrangement de l'ensemble des coureurs. Il en existe $8\times 7\times 6 = 336$ différents.

**Corrigé exercice 38 :**

1. Le mot de passe est une permutation des lettres du prénom “Marion”. Il y en a donc $6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$ différents.
2. Si le mot de passe est composé de 4 caractères, c'est en fait un 4-arrangement d'un ensemble à 6 éléments (les lettres du prénom). Il y en a $6\times 5\times 4\times 3 = 360$ différents.

**Corrigé exercice 39 :**

L'ensemble possède 6 éléments, puisque $6! = 720$

**Corrigé exercice 40 :**

Le nombre de deux arrangements d'un ensemble à $n$ éléments est $n(n-1)$. On doit donc résoudre l'équation $n(n-1) = 306$ ou $n^2 - n - 306 = 0$. Le discriminant de $x^2 - x - 306$ vaut $1\,225$, qui est strictement positif. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes qui sont $x_1 = \dfrac{-(-1)+\sqrt{1225}}{2} = 18$ et $x_2 = \dfrac{-(-1)-\sqrt{1225}}{2} = -17$. Puisque seules les solutions entières naturelles nous intéressent, on a ainsi $n = 18$. Remarque : il également possible de remarquer que $\sqrt{306} \approx 17,49$, puis de vérifier que $18 \times 17 = 306$.

**Corrigé exercice 41 :**

Les parties de $A$ sont $\varnothing$, $\{7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{7;8\}$, $\{7;9\}$, $\{8;9\}$ et $\{7;8;9\}$.

**Corrigé exercice 42 :**

1. Il y a $2^9 = 512$ parties de l'ensemble $B$.
2. Il y a $\dbinom{9}{3} = \dfrac{9!}{3!6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ parties de $B$ à 3 éléments.
3. On sait que $\dbinom{9}{3} = \dbinom{9}{9-3} = \dbinom{9}{6}$. Il y a donc aussi 84 parties de $B$ à 6 éléments.

**Corrigé exercice 43 :**

Cela revient à choisir 6 cases parmi 16 possibles. Il y a $\dbinom{16}{6} = 8008$ façons de procéder.

**Corrigé exercice 44 :**

1. a. Il y a $\dbinom{32}{5} = 201376$ mains possibles.

   b. Les piques sont au nombre de 8, il y a donc $\dbinom{8}{5} = 56$ mains possibles ne contenant que des piques.

   c. Une main composée de quatre carreaux possède également une autre carte prise parmi les 24 cartes restantes. Le nombres de mains avec exactement 4 carreaux est donc $\dbinom{8}{4} \times 24 = 1680$ mains.

2. a. Il y a $\dbinom{32}{8} = 10\,518\,300$ mains possibles.

   b. Il y a $\dbinom{8}{5} \times \dbinom{24}{3} = 113\,344$ mains avec exactement 5 coeurs.

c. Il y a $\binom{8}{6} \times \binom{24}{2} = 7728$ mains avec exactement 6 cœurs.
Il y a $\binom{8}{7} \times \binom{24}{1} = 192$ mains avec exactement 7 cœurs.
Il n'y a qu'une seule main avec huit cœurs.

d. Il y a donc $113\,344 + 7\,728 + 192 + 1 = 121\,265$ mains avec au moins 5 cœurs.

**Corrigé exercice 45 :**

On peut par exemple proposer l'énoncé suivant. « Combien de mains différentes de 4 cartes y a-t-il dans un jeu de 52 cartes différentes ? »

**Corrigé exercice 46 :**

On remarque que $32 = 2^5$. Tout ensemble à 5 éléments convient. Par exemple, l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

**Corrigé exercice 47 :**

Voici un exemple d'énoncé. « On considère l'alphabet français constitué de 26 lettres différentes. On appelle mot un ensemble de lettres parmi celles de l'alphabet, sans se soucier du sens de ce mot. Par exemple cldck est un mot de 5 lettres. 1- Combien de mots de trois lettres quelconques peut-on écrire ? 2- Combien de mots de trois lettres toutes distinctes peut-on écrire ? 3- Combien de mots de 26 lettres toutes distinctes peut-on écrire ? 4- On considère maintenant un alphabet constitué de $n$ lettres toutes différentes. Combien de mots constitués de 5 lettres différentes peut-on écrire ?

# 7 Exercices d'entraînement partie 1

**Corrigé exercice 48 :**

Si les ensembles $A$ et $B$ étaient disjoints, on aurait $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$. Or, $15 + 27 = 42 \neq 35$. Les ensembles $A$ et $B$ ne sont donc pas disjoints.

**Corrigé exercice 49 :**

Puisque $A$ et $B$ sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 9 + 7 = 16$. Par ailleurs, $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 9 \times 7 = 63$.

**Corrigé exercice 50 :**

Il y a au total $5 \times 3 \times 2 = 30$ tenues différentes à composer.

**Corrigé exercice 51 :**

En prenant $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, on a bien $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

**Corrigé exercice 52 :**

Dans les nombres de 1 à 100, on classe les nombres contenant un 3 en deux catégories :

- ceux comptant un 3 en première position et un chiffre quelconque en deuxième position, il y en a 10 ;
- ceux comptant un 3 en deuxième position et un chiffre différent de 3 en première position, il y en a 9 (le nombre 3 est compté parmi ceux-là).

Ces ensembles sont disjoints et leur union donne l'ensemble des nombres contenant un 3. Il y a donc $10 + 9 = 19$ nombres s'écrivant avec un 3 entre 1 et 100.
Une autre stratégie est d'utiliser le complémentaire. Pour un nombre ne s'écrivant avec aucun 3, il y a 9 possibilités pour le premier chiffre et 9 pour le deuxième, soit 81 au total -on assimile ainsi le couple $(0\,;\,6)$ au nombre 6. Il faut exclure le couple $(0\,;\,0)$ mais rajouter le nombre 100 qui ne contient pas de 3 : cela donne 81 nombres sans 3 dans leur écriture parmi ceux entre 1 et 100. Entre 1 et 100, il y a 100 nombres, ce qui donne donc $100 - 81 = 19$ nombres s'écrivant avec un 3.

**Corrigé exercice 53 :**

Dans un tel diagramme, les régions présentées sont disjointes, on peut donc additionner leur cardinal pour obtenir la population totale (ici, le nombre d'assiettes contrôlées). $190 + 12 + 68 + 46 = 316$ assiettes contrôlées.

**Corrigé exercice 54 :**

Les diviseurs positifs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24 donc $\text{Card}(A) = 8$. Les diviseurs positifs de 42 sont 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 et 42 donc $\text{Card}(B) = 8$. Dans un diagramme, on pourrait faire apparaître les diviseurs communs dans l'intersection de $A$ et $B$. On a : $A \cap B = \{1; 2; 3; 6\}$ et $\text{Card}(A \cap B) = 4$. De plus $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 12; 14; 21; 24; 42\}$ et $\text{Card}(A \cup B) = 12$.

**Corrigé exercice 55 :**

1. Ont été interrogées : $10 + 68 + 17 + 3 + 1 + 35 + 3 + 6 = 143$ personnes.

2. Le cardinal de $E$ est $35+3+1+17 = 56$. Celui de $A$ est $68+3+1+17 = 89$. Celui de $I$ est $6 + 3 + 1 + 3 = 13$.

3. Le cardinal de $A\cup I$ est $68+3+1+17+3+6 = 98$. Le cardinal $A\cap E$ est $17+1 = 18$. Le cardinal de $I \cap E$ est $1 + 3 = 4$.

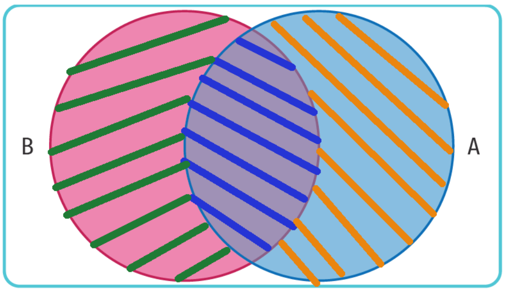
4. $17 + 1 + 3 + 3 = 24$. 24 personnes parlent au moins deux langues parmi celles présentées ici.

**Corrigé exercice 56 :**

Puisque $A$ et $\overline{A}$ sont disjoints, $\text{Card}(A\cup\overline{A}) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A})$. Or, $A\cup\overline{A} = E$. Ainsi, $\text{Card}(E) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A})$ d'où $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

**Corrigé exercice 57 :**

1. Hachuré en bleu : $A \cap B$ ; Hachuré en vert : $B \setminus A$ ; Hachuré en orange : $A \setminus B$.




2. Ces trois ensembles sont disjoints :

   - Les éléments de $A\cap B$ sont à la fois dans $A$ et $B$. Cet ensemble est donc disjoint de $A \setminus B$ qui ne contient aucun élément de $B$ et est disjoint de $B \setminus A$ qui ne contient aucun élément de $A$.
   - Les ensembles $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont disjoints égalements : si un élément $x$ appartenait à ces deux ensembles, alors il serait à la fois un élément de $A$ car il est dans $A \setminus B$ et un élément de $\overline{A}$ car il est dans $B \setminus A$, ce qui est impossible.

3. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ car c'est la réunion de l'ensemble contenant tous les éléments de $A$ qui ne sont pas dans $B$ avec l'ensemble des éléments de $A$ également contenu dans $B$. On a donc bien regroupé tous les éléments de $A$.

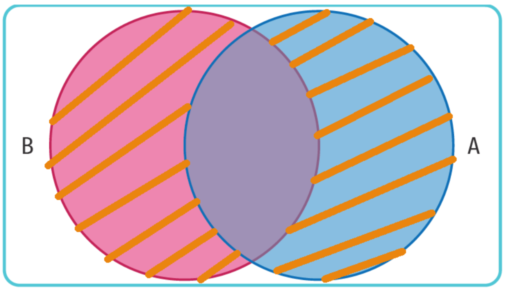
4. On remarque de plus que $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$ et les ensembles $B$ et $A \setminus B$ sont disjoints. Ainsi, $\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(B)+\text{Card}(A\setminus B)$. Par ailleurs, puisque $A\setminus B$ et $A\cap B$ sont disjoints, d'union $A$, on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(A\setminus B)+\text{Card}(A\cap B)$ ou encore $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B)$. En injectant cette égalité dans la première, on trouve $\text{Card}(A) = \text{Card}(A\setminus B)+\text{Card}(A\cap B) = \text{Card}(A)+\text{Card}(B)-\text{Card}(A\cap B)$

**Corrigé exercice 58 :**

Appelons $B$ l'ensemble des joueurs de basketball et $F$ l'ensembles des joueurs de football. On a $\text{Card}(B) = 42$, $\text{Card}(F) = 60$ et $\text{Card}(B \cup F) = 84$. En appliquant la formule du crible, on trouve $\text{Card}(B \cup F) = \text{Card}(B) + \text{Card}(F) - \text{Card}(B \cap F)$ soit $\text{Card}(B \cap F) = 60 + 42 - 84 = 18$. 18 personnes pratiquent les deux sports.

**Corrigé exercice 59 :**

1. On obtient la figure ci-dessous.




2. $(A \Delta B)$ et $A \cap B$ sont disjoints et leur union vaut $A \cup B$. On a ainsi $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A \Delta B) + \text{Card}(A \cap B)$. En appliquant la formule de l'exercice 55, on a alors $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A \Delta B) + \text{Card}(A \cap B)$ d'où $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) - 2\text{Card}(A \cap B) = \text{Card}(A \Delta B)$.

**Corrigé exercice 60 :**

Les éléments de $E \times F$ sont $(1;2)$, $(1;3)$, $(3;2)$, $(3;3)$, $(7;2)$, $(7;3)$. Ceux de $F \times E$ sont $(2;1)$, $(2;3)$, $(2;7)$, $(3;1)$, $(3;3)$, $(3;7)$. Il faut se rappeler que, dans un couple de nombres, l'ordre a de l'importance, comme lorsque l'on écrit des coordonnées.

**Corrigé exercice 61 :**

Les éléments de $E^2$ sont $(\pi;\pi)$, $(\pi;\sqrt{2})$, $(\pi;4)$, $(\sqrt{2};\pi)$, $(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};4)$, $(4;\pi)$, $(4;\sqrt{2})$ et $(4;4)$.

**Corrigé exercice 62 :**

Il y a $2^3 = 8$ 3-uplets de $E$. Ceux-ci sont (0 ;0 ;0), (1 ;0 ;0), (0 ;1 ;0), (1 ;1 ;0), (0 ;0 ;1), (0 ;1 ;1), (1 ;0 ;1) et (1 ;1 ;1). Il suffit d'en prendre quatre parmi ceux-là.

**Corrigé exercice 63 :**

Notons $a = \text{Card}(A)$ et $b = \text{Card}(B)$. Puisque $A$ et $B$ sont disjoints, on a $\text{Card}(A \cup B) = a + b = 23$. Par ailleurs, on a $\text{Card}(A \times B) = ab = 132$.

Méthode 1 : Cela revient donc à résoudre le système $\begin{cases} a + b = 23 \\ ab = 132 \end{cases}$. Ce système est équivalent à $\begin{cases} a = 23 - b \\ (23 - b)b = 132 \end{cases}$. Ou encore $\begin{cases} a + b = 23 \\ -b^2 + 23b - 132 = 0 \end{cases}$. Résolvons donc

$-b^2+23b-132=0$ qui est une équation du second degré. Le discriminant du polynôme $-b^2+23b-132$ vaut $23^2-4\times(-1)\times(-132)=1>0$. L'équation possède donc deux solutions qui sont $b_1=\dfrac{-23-\sqrt{1}}{2\times(-1)}=12$ et $b_2=\dfrac{-23+\sqrt{1}}{2\times(-1)}=11$. Puisque $b>a$, on obtient que $b=12$ et $a=11$.
Méthode 2 : On revient aux relations entre coefficients et racines d'un polynôme : si $a$ et $b$ ont pour somme $s$ et pour produit $p$, alors ce sont les deux racines du polynôme $x^2-sx+p$, soit $x^2-23x+132$. On continue alors comme pour la méthode 1.
Méthode 3 : $a$ et $b$ étant des entiers naturels, on établit la liste des diviseurs positifs de 132. Ce sont les entiers 1, 2, 3, 6, 11, 12, 22, 44, 66, 132. Puisque $a<b$, les seules possibilités restantes sont alors $(a=1,\ b=132)$, $(a=2,\ b=66)$, $(a=3,\ b=44)$, $(a=6,\ b=22)$, $(a=11,\ b=12)$. Le fait que la somme de $a$ et $b$ soit 23 nous oriente naturellement vers la dernière possibilité.

**Corrigé exercice 64 :**

On utilise la décomposition de 3 087 en produits de facteurs premiers : $3087=3^2\times7^3$. De plus, $\text{Card}(A^3\times B^2)=\text{Card}(A)^3\times\text{Card}(B)^2$. Il en vient que $\text{Card}(A)=7$ et $\text{Card}(B)=3$.

**Corrigé exercice 65 :**

Pour les menus entrée-plat-dessert, il y a $4\times2\times3=24$ possibilités Pour les menus entrée-plat, il y en a $4\times2=8$ et pour les menus plat-dessert, il y en a $2\times3=6$. Au total, ce sont $24+8+6=38$ menus qu'il est possible de composer.

**Corrigé exercice 66 :**

1. Un mot de quatre lettres est un 4-uplet de l'ensemble des lettres $\{A;B;C;D\}$. Il y en a $4^4=256$.

2. Il y a $4^5=1024$ mots de 5 lettres et $4^6=4096$ mots de 6 lettres. Au total, il y a donc $4096+1024=5120$ mots de 5 ou 6 lettres.

**Corrigé exercice 67 :**

Dans cet ouvrage, un poème est assimilé à un 14-uplet de l'ensemble des entiers de 1 à 10 inclus, ce nombre étant le numéro du vers conservé pour le poème. Il y a ainsi $10^{14}$ poèmes possibles, soit cent mille milliards.

**Corrigé exercice 68 :**

1. Si $A$ ou $B$ est vide, leur cardinal vaut 0 et le produit $A\times B$ est égalements vide, de cardinal 0 également. La formule reste valable.

2. a. Les éléments de $A_i$ sont les couples $(a_k;b_i)$ pour $k$ allant de 1 à $n$. Il y a donc $n$ éléments dans chaque $A_i$.
   b. Les ensembles $A_i$ sont deux à deux disjoints. En effet, le deuxième élément d'un couple diffère d'un ensemble $A_i$ à un autre.
   c. L'union des $A_i$ pour $i$ allant de 1 à $p$ est $A\times B$.

d. Cette union est disjointe, on a$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A_1) + \ldots + \text{Card}(A_p) = n + \ldots + n = np$

**Corrigé exercice 69 :**

Soit $n$ un entier naturel non nul. On note $\mathcal{P}_n$ la proposition $\text{Card}(A^n) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^n$.

- Initialisation : $\mathcal{P}_1$ est vraie. En effet $A^1 = A$ et $\text{Card}(A) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^1$.
- Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel non nul $k$ pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie.

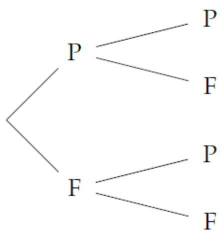
  On assimile alors $A^{k+1}$ à $A^k \times A$. Cette association se faisant de manière univoque, on a alors $\text{Card}(A^{k+1}) = \text{Card}(A^k \times A)$. Ainsi, $\text{Card}(A^{k+1}) = \text{Card}(A^k \times A) = \text{Card}(A^k) \times \text{Card}(A) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^k \times \text{Card}(A)$ par hypothèse de récurrence.

  Finalement, on a $\text{Card}(A^{k+1}) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^{k+1}$. La proposition $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie $\text{Card}(A^{k+1}) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^{k+1}$.
- Conclusion : Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a bien $\text{Card}(A^n) = \Big[\text{Card}(A)\Big]^n$

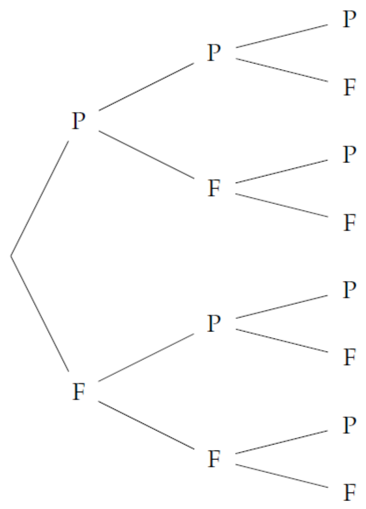
**Corrigé exercice 70 :**

1. On obtient les arbres suivants.

Cas $n = 2$



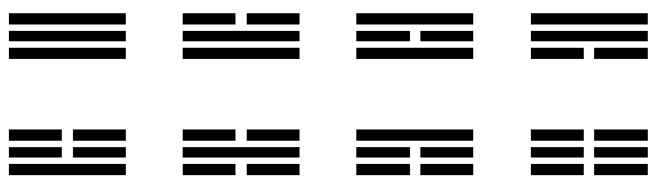
Cas $n = 3$




2. Dans le cas général, à chaque lancer, on a deux possibilités, soit $2^n$ issues total.

**Corrigé exercice 71 :**

1. On a deux possibilités pour chaque ligne, soit $2^3 = 8$ trigrammes différents.
2. On donne ici tous les trigrammes possibles.



# 8 Exercices d'entraînement partie 2

### Corrigé exercice 72 :

- $1! = 1$
- $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

### Corrigé exercice 73 :

- $\frac{12!}{10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{10!} = 12 \times 11 = 132$
- $\frac{6!}{8!} = \frac{6!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{1}{56}$
- $\frac{2019!}{2018!} = 2019$
- $\frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = 9 \times 4 = 36$

### Corrigé exercice 74 :

1. Pour tout entier naturel $n$, on a $(n+1)! = (n+1) \times n!$. Ainsi, $(n+1)! - n! = (n+1-1)n! = n \times n! \geqslant 0$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $(n+1)! \geqslant n!$. Il est également possible de raisonner à l'aide du quotient, en précisant que pour tout entier naturel $n$, $n!$ est strictement positif. On a $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \geqslant 1$.
2. Il y a égalité lorsque $n = 0$. En effet, $1! = 1 = 0!$.

### Corrigé exercice 75 :

1. a. Il y a 5 choix pour la première lettre, 4 pour la deuxième et 3 pour la troisième, soit $5 \times 4 \times 3 = 60$ mots possibles.
   b. Si la lettre A est en première position, il n'y a plus qu'1 choix pour la première lettre, 4 pour la deuxième et 3 pour la troisième soit $4 \times 3 = 12$ mots possibles.
   c. Sans utiliser la lettre T, cela laisse 4 choix pour la première lettre, 3 pour la deuxième et 2 pour la troisième soit $4 \times 3 \times 2 = 24$ mots possibles.
2. a. Cela revient à choisir une permutation de l'ensemble des lettres, à 5 éléments. Il y en a $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
   b. Deux lettres sont fixées, il faut encore en placer 3. Il y a 3 choix pour la première, 2 choix pour la deuxième et la lettre restante sera en quatrième position, soit $3 \times 2 \times 1 = 6$ configurations possibles.

**Corrigé exercice 76 :**

1. $(n+1) \times n! = (n+1)!$
2. $\dfrac{(n-5)!}{(n-7)!} = \dfrac{1}{(n-6)(n-7)}$
3. $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} = n!$
4. $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{n+1}{(n+1)!} = -\dfrac{n}{(n+1)!}$

**Corrigé exercice 77 :**

1. $\dfrac{n! \times (n+2)!}{(n!)^2} = (n+2)(n+1)$
2. $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!} = n+1-\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2-1}{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$
3. $\dfrac{(2(n+1))!}{(2n+1)!} = 2n+2$
4. $\dfrac{1}{(n-2)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{n(n-1)}{n!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{n^2-n-1}{n!}$

**Corrigé exercice 78 :**

On constate que $n!$ est proche de $S(n)$.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | n | n! | S(n) |
| 2 | 1 | 1 | 0,9221370089 |
| 3 | 2 | 2 | 1,919004351 |
| 4 | 3 | 6 | 5,836209591 |
| 5 | 4 | 24 | 23,50617513 |
| 6 | 5 | 120 | 118,019168 |
| 7 | 6 | 720 | 710,0781846 |
| 8 | 7 | 5040 | 4980,395832 |
| 9 | 8 | 40320 | 39902,39545 |
| 10 | 9 | 362880 | 359536,8728 |
| 11 | 10 | 3628800 | 3598695,619 |
| 12 | 11 | 39916800 | 39615625,05 |
| 13 | 12 | 479001600 | 475687486,5 |
| 14 | 13 | 6227020800 | 6187239475 |
| 15 | 14 | 87178291200 | 86661001741 |
| 16 | 15 | 1307674368000 | 1300430722199 |
| 17 | 16 | 20922789888000 | 20814114415223 |
| 18 | 17 | 355687428096000 | 353948328666100 |
| 19 | 18 | 6,40237E+15 | 6,3728E+15 |
| 20 | 19 | 1,21645E+17 | 1,21113E+17 |
| 21 | 20 | 2,4329E+18 | 2,42279E+18 |
| 22 | 21 | 5,10909E+19 | 5,08886E+19 |
| 23 | 22 | 1,124E+21 | 1,11975E+21 |
| 24 | 23 | 2,5852E+22 | 2,57585E+22 |
| 25 | 24 | 6,20448E+23 | 6,18298E+23 |
| 26 | 25 | 1,55112E+25 | 1,54596E+25 |
| 27 | 26 | 4,03291E+26 | 4,02001E+26 |
| 28 | 27 | 1,08889E+28 | 1,08553E+28 |
| 29 | 28 | 3,04888E+29 | 3,03982E+29 |
| 30 | 29 | 8,84176E+30 | 8,81639E+30 |
| 31 | 30 | 2,65253E+32 | 2,64517E+32 |

**Corrigé exercice 79 :**

```
1 def factorielle(n):
2     factorielle=1
3     for i in range(1,n+1):
4         factorielle *= i
5     return factorielle
```

Pour la ligne 3, range(1,n+1) permet d'avoir tous les entiers de 1 à n. Cette liste sera vide si n = 0 et renverra donc bien 1 pour la factorielle de 0. La ligne 4 peut également être écrite factorielle = factorielle * i

Une autre version, récursive, peut être écrite.

```
1 def factorielle(n):
2     if n==0 or n==1:
3         return 1
4     else:
5         return n*factorielle(n-1)
```

Cette version met en évidence le fait que pour tout entier naturel $n$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$. La ligne 2 permet d'indiquer que $1! = 0! = 1$. Si $n$ est égal à 1 ou 0, le programme renvoie directement 1. Sinon, il calcule la factorielle de $n-1$. Par exemple, pour calculer $4!$, ce programme procède grossièrement ainsi : factorielle(4) $= 4 \times$ factorielle(3) $= 4 \times 3 \times$ factorielle(2) $= 4 \times 3 \times 2 \times$ factorielle(1) $= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

**Corrigé exercice 80 :**

1. Puisque $A$ et $B$ sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = n + p$. Le nombre de permutations de $A \cup B$ est donc $(n+p)!$.
2. Il y a deux possibilités pour que les éléments de $A$ et $B$ ne soient pas mélangés :
   - Ou bien on place d'abord tous les éléments de $A$ puis tous les éléments de $B$.
   - Ou bien on fait l'inverse.

   Dans chacun des deux cas, il y a $n!p!$ façons de le faire. Au total, il y a donc $2n!p!$ permutations qui ne mélangent pas les éléments de $A$ et $B$.

**Corrigé exercice 81 :**

Soit $n$ un entier naturel. $(n+2)! = 6n! \Leftrightarrow \dfrac{(n+2)!}{n!} = 6 \Leftrightarrow (n+2)(n+1) = 6 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 4 = 0$. Cette équation possède deux solutions réelles : 1 et $-4$. Puisque l'on ne considère que les solutions entières naturelles, l'unique solution de l'équation est $n = 1$.

**Corrigé exercice 82 :**

1. Dans la cellule B2, on écrit : =2ˆA2

   Dans la cellule D2, on écrit : =A2ˆA2
2. Dans la cellule C2, on écrit : =1
3. Dans la cellule C3, on écrit : =C2*A3 On obtient le tableau suivant.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | n | 2^n | n! | n^n |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 4 | 2 | 4 |
| 4 | 3 | 8 | 6 | 27 |
| 5 | 4 | 16 | 24 | 256 |
| 6 | 5 | 32 | 120 | 3125 |
| 7 | 6 | 64 | 720 | 46656 |
| 8 | 7 | 128 | 5040 | 823543 |
| 9 | 8 | 256 | 40320 | 16777216 |
| 10 | 9 | 512 | 362880 | 387420489 |

4. Il semblerait qu'on ait $2^n \leq n! \leq n^n$ à partir de $n = 4$.
5. On va démontrer cette conjecture par récurrence. Au rang $n = 4$, on a bien $2^4 \leq 4! \leq 4^4$ car $16 \leq 24 \leq 256$. Supposons le résultat acquis au rang $n$ fixé, où $n \geq 4$. On a $2^n \leq n! \leq n^n$ et on veut montrer que $2^{n+1} \leq (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$. Dans un

premier temps, $(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)2^n \geq 2^{n+1}$ car $n+1 \geq 2$. Dans un second temps, $(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)n^n \leq n^{n+1} \leq (n+1)^{n+1}$. La propriété est prouvée pour tout entier naturel par récurrence.

**Corrigé exercice 83 :**

Il est possible de constituer $10 \times 9 \times 8 = 720$ entiers différents.

**Corrigé exercice 84 :**

1. En créant un emploi du temps, Mathilde fera une permutation d'un ensemble à 4 éléments. Il y a $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ emplois du temps possibles.

2. En regroupant les mathématique et la physique, il ne reste que 3 éléments. Il y a $3! = 6$ emplois du temps possibles.

**Corrigé exercice 85 :**

Une suite d'exercice est un 5-arrangement de l'ensemble d'exercices, à 10 éléments. Il y a donc $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$ suites d'exercices possibles.

**Corrigé exercice 86 :**

1. Si une même couleur peut être utilisée plusieurs fois, il y a $5^5 = 3125$ coloriages possibles.

2. Si une couleur ne peut être utilisée qu'une fois, il y a alors $5! = 120$ coloriages possibles.

3. Si deux lettres adjacentes ne doivent pas être de la même couleur, cela laisse 5 possibilités pour la première lettre, 4 pour la deuxième, 4 pour la troisième, 4 pour la quatrième et 4 pour la cinquième. Au total, il y a $5 \times 4^4 = 1280$ coloriages possibles.

4. Si une couleur peut être utilisée plusieurs fois, cela laisse 5 possibilité pour le fond puis 4 possibilités pour chacune des lettres, soit $5 \times 4^5 = 5120$ possibilités. Il n'est en revanche pas possible de n'utiliser chaque couleur qu'une seule fois puisqu'il y a 6 zones à colorier. En revanche, si deux lettres adjacentes ne peuvent être de la même couleur, on a alors 5 possibilités pour le fond, 4 pour la première lettre, 3 pour la deuxième, 3 pour la troisième, 3 pour la quatrième et 3 pour la cinquième. Il y a donc $5 \times 4 \times 3^4 = 1620$ possibilités.

**Corrigé exercice 87 :**

1. a. Si le 0 est autorisé en première position, il y a $4! = 24$ configurations possibles.

   b. Si le 0 est interdit, cela laisse 3 possibilités pour le premier chiffre. On réorganise alors les 3 chiffres restants en faisant une permutation. Le nombre de configurations est donc de $3 \times 3! = 18$.

2. a. Si le chiffre 0 est interdit en première position, cela donne 3 possibilités pour le 1er chiffre, 3 pour le deuxième et 2 pour le troisième, soit 18 possibilités au total.

   b. Rappelons qu'un nombre est un multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est aussi un multiple de 3. Ici, les seules possibilités pour construire un tel nombre sont d'utiliser les chiffres 1, 2 et 3 ou les chiffres 1, 2 et 0. Dans les deux cas, il y a $3! = 6$ configurations possibles. Au total, il y a donc 12 nombres respectant les conditions imposées.

# 9 Exercices d'entraînement partie 3

**Corrigé exercice 88 :**

1. $E$ est de cardinal 3, l'ensemble des parties de $E$ a donc pour cardinal $2^3 = 8$.
2. Les parties de $E$ sont $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ et $\{1;2;3\}$.

**Corrigé exercice 89 :**

1. Il y a $2^8 = 256$ parties de l'ensemble $A$.
2. Le nombre de parties à 3 éléments de l'ensemble $A$ vaut $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 8 \times 7 = 56$.
3. Puisque $5 = 8 - 3$, on a $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$. Il y a 56 parties à 5 éléments de l'ensemble $A$.

**Corrigé exercice 90 :**

1. Il y a $\binom{10}{5} = 252$ combinaisons d'exercice possibles.
2. Il reste à choisir 4 exercices sur les 9 restant soit $\binom{9}{4} = 126$ combinaisons.
3. Le 10 étant un bonus, il faut choisir 5 exercices parmi 9, soit $\binom{9}{5} = 126$ possibilités.

**Corrigé exercice 91 :**

1. Les sous-ensembles de $E$ à deux éléments sont $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{3;4\}$.
2. Il y a donc 6 sous-ensembles à 2 éléments de l'ensemble $E$ à 4 éléments. Ainsi, $\binom{4}{2} = 6$.

**Corrigé exercice 92 :**

1. Les sous-ensembles de $F$ à 3 éléments sont $\{a;b;c\}$, $\{a;b;d\}$, $\{a;b;e\}$, $\{a;c;d\}$, $\{a;c;e\}$, $\{a;d;e\}$, $\{b;c;d\}$, $\{b;c;e\}$, $\{b;d;e\}$, $\{c;d;e\}$.
2. Il y a donc 10 sous-ensembles à 3 éléments de l'ensemble $E$ à 5 éléments. Ainsi, $\binom{5}{3} = 10$.

**Corrigé exercice 93 :**

1. On rappelle que $0! = 1$. Ainsi, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$. Le seul sous-ensemble à 0 élément d'un ensemble à $n$ éléments est l'ensemble vide $\varnothing$.
2. $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$.
3. Puisque pour tout entier $k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a alors $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

**Corrigé exercice 94 :**

1. L'ensemble $A \setminus X$ possède $n-k$ éléments.
2. À chaque partie à $k$ éléments de l'ensemble $A$, on peut associer de manière univoque une partie à $n-k$ éléments de l'ensemble $A$. Ainsi, le cardinal de l'ensemble des combinaisons à $k$ éléments de $A$ est égal au cardinal de l'ensemble des combinaisons à $n-k$ éléments de $A$, c'est-à-dire $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

**Corrigé exercice 95 :**

1. $\binom{10}{1} = 10$, $\binom{48}{47} = 48$, $\binom{55}{0} = 1$, $\binom{64}{63} = 64$, $\binom{51}{50} = 51$.
2. $\binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$, $\binom{30}{29} = 30$, $\binom{50}{1} = 50$, $\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$, $\binom{14}{14} = 1$.
3. $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$, $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$,
$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$, $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$.
Enfin, d'après la relation de Pascal, $\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5}$.
Ainsi, $\binom{11}{5} = 210 + 252 = 462$.
4. $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = 0$ car $\binom{5}{0} = \binom{5}{5}$, $\binom{5}{1} = \binom{5}{4}$ et $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

**Corrigé exercice 96 :**

1. On a $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

2. Pour choisir deux éléments différents parmi $n$, on a $n$ choix pour le premier et $n-1$ pour le deuxième, soit $n(n-1)$ possibilités. Or, l'ordre n'importe pas dans une combinaison. Par ce procédé, chaque paire est ainsi compté deux fois. Il en vient que le nombre de combinaison de 2 éléments d'un ensemble à $n$ éléments vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

**Corrigé exercice 97 :**

Note : pour cet exercice, on précise que si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

1. L'entier 0 est solution de l'équation $\binom{n}{3} = n$. 1 et 2 ne le sont pas. Soit maintenant $n$ un entier supérieur ou égal à 3.
$\binom{n}{3} = n \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = n \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n \Leftrightarrow \frac{n(n^2-3n-4)}{6} = 0$
$n$ étant supérieur ou égal à 3, cela revient à résoudre $n^2 - 3n - 4 = 0$. L'équation $x^2 - 3x - 4 = 0$, d'inconnue réelle $x$, possède deux solutions : $x = -1$ et $x = 4$. De fait, l'unique solution entière supérieur ou égale à 3 de l'équation $n^2 - 3n - 4 = 0$ est 4. Les solutions de l'équation $\binom{n}{3} = n$ sont donc 0 et 4.

2. Les entiers 0 et 1 sont solutions de l'équation $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$. 2 ne l'est pas puisque $\binom{2}{2} = 1$ et $\binom{2}{3} = 0$. Soit maintenant $n$ un entier supérieur ou égal à 3.
$\binom{n}{2} = \binom{n}{3} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow n(n-1)\frac{5-n}{6} = 0,$
ce qui revient à $5 - n = 0$, $n$ étant supérieur ou égal à 3. L'unique solution dans ce cas est $n = 5$. Les solutions de l'équation $\binom{n}{2} = \binom{n}{3}$ sont donc 0, 1 et 5.

3. Si $n = 0$ ou $n = 1$, l'égalité est vérifiée. Pour $n = 2$, elle ne l'est pas. Supposons maintenant $n \geq 3$.
$2\binom{n}{2} = 3\binom{n}{3} \iff n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \iff n(n-1)\frac{4-n}{2} = 0 \iff 4 - n = 0 \iff n = 4$
Les solutions sont donc 0, 1 et 4.

**Corrigé exercice 98 :**

Pour tout entier naturel non nul $n$, $\binom{2n}{n} > 0$. Calculons donc

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \times \frac{n!n!}{(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{4n+2}{n+1}\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel $n$, $4n+2 > n+1$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. La suite $(u_n)$ est donc strictement croissante.

**Corrigé exercice 99 :**

Organiser un débat revient à choisir 2 candidats parmi 11. Il y a donc $\binom{11}{2} = \frac{11 \times 10}{2} =$ 55 débats possibles.

**Corrigé exercice 100 :**

Le nombre de combinaisons possibles est égal à $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$.

**Corrigé exercice 101 :**

Le nombre de combinaisons possibles est $\binom{49}{5} \times \binom{10}{1}$, ce qui fait 19 068 840 possibilités.

**Corrigé exercice 102 :**

1. Une arête correspond à une paire de points : il y en a $\binom{n}{2}$, soit $\frac{n(n-1)}{2}$.
2. Une arête correspond à un couple $(a; b)$ où $a$ est un point du groupe de taille $k$ et $b$ un point du groupe de taille $n-k$. Le nombre d'arêtes tracées vaut donc $k(n-k)$.

**Corrigé exercice 103 :**

Méthode 1 : À l'aide de la formule.

$$\begin{aligned} n\binom{n-1}{k-1} &= \frac{n\times(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{k\times n!}{k\times(k-1)!(n-k)!} \\ &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k\binom{n}{k} \end{aligned}$$

Méthode 2 : À l'aide d'un dénombrement. On dispose de $n$ éléments que l'on souhaite découper en 3 groupes de taille 1, $k-1$ et $n-k$. Il y a deux possibilités :

- Choisir $k$ éléments parmi $n$ puis 1 élément parmi les $k$, ce qui donne un total de $\binom{n}{k}\binom{k}{1} = k\binom{n}{k}$
- Choisir 1 élément parmi $n$ puis $k-1$ parmi les $n-1$ restants, ce qui donne $\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

Les deux méthodes donnent évidemment les mêmes possibilités donc : $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.

**Corrigé exercice 104 :**

1. Il y a $\binom{2n}{n}$ parties à $n$ éléments de $A$.
2. On divise l'ensemble $A$ en deux sous-ensembles $A_1$ et $A_2$, chacun ayant $n$ éléments. Soit $k$ un entier inférieur ou égal à $n$.
   - Il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir $k$ éléments dans $A_1$.
   - Il y a $\binom{n}{n-k}$ manières de choisir $n-k$ éléments dans $A_2$. Or, $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
   - Il y a ainsi $\binom{n}{k}^2$ manières de choisir $n$ éléments dans $A$ en en choisissant $k$ dans $A_1$

   Le nombre total de manière de choisir $n$ éléments dans $A$ vaut donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. On a donc bien l'égalité recherchée.

# 10 Exercices de synthèse

**Corrigé exercice 105 :**

1. Il existe $\binom{n}{k}$ combinaisons de $k$ éléments de $A$.
2. L'élément $a$ étant fixé et appartenant à la combinaison considérée, il faut encore choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ restants : il y a $\binom{n-1}{k-1}$ combinaisons possibles.
3. Si l'élément $a$ n'appartient pas à la combinaison, il faut choisir $k$ éléments parmi les $n-1$ restants, soit $\binom{n-1}{k}$ possibilités.
4. Notons $A_a$ l'ensemble des combinaisons à $k$ éléments de $A$ contenant l'élément $a$ et $\overline{A_a}$ l'ensemble des combinaisons à $k$ éléments de $A$ ne contenant pas l'élément $a$. Ces ensembles sont évidemment disjoints et leur union vaut l'ensemble des combinaisons à $k$ éléments de $A$. Ainsi, $\binom{n}{k} = \text{Card}(A_a \cup \overline{A_a}) = \text{Card}(A_a) + \text{card}(\overline{A_a}) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
5. En procédant méthodiquement, on obtient le calcul ci-après :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{k}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{n-k}{n-k} \times \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= k \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} + (n-k) \times \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

**Corrigé exercice 106 :**

1. L'algorithme possède une variable ListeTemp et une variable PartieDeux.
   - Les deux boucles for servent à balayer la liste A deux fois. La première parcourt toute la liste tandis que la deuxième n'en parcourt qu'une partie, du rang i+1 jusqu'à la fin, afin d'éviter d'avoir deux fois le même élément.
   - Dans la variable ListeTemp, qui est une liste, on ajoute deux éléments de la liste A - le i-ième et le j-ième. On construit ainsi un ensemble à deux éléments de A.

- Cet ensemble à deux éléments est ajouté à la liste PartieDeux qui sera l'ensemble des parties à deux éléments de A.
- La liste ListeTemp est réinitialisée à la ligne 10.

Il est possible de créer une nouvelle variable n qui vaut len(A) en début de programme. Cela permet de ne pas avoir à calculer deux fois la longueur. Par ailleurs, ce programme peut être présenté sous la forme d'une fonction. On inscrit alors def partiedeux(A) : au lieu de définir notre liste A, puis un return PartieDeux en fin de programme

2. Pour générer les parties à 3 éléments, il suffit d'ajouter une 3ème boucle après les deux premières

```
ListeTemp est une liste vide
PartieTrois est une liste vide
n ← longueur(A)
Pour i allant de 1 à n
        Pour j allant de i+1 à n
              Pour k allant de j+1 à n
                     Ajouter A[i] à ListeTemp
                     Ajouter A[j] à ListeTemp
                     Ajouter A[k] à ListeTemp
                     Ajouter ListeTemp à PartieTrois
                     ListeTemp ← []
```

**Corrigé exercice 107 :**

1. Sans restriction de poste, il y a $\binom{23}{11} = 1\,352\,078$ équipes possibles.
2. En tenant compte des postes, cela donne $\binom{3}{1} \times \binom{8}{4} \times \binom{5}{3} \times \binom{7}{3}$ soit 73500 équipes possibles.

**Corrigé exercice 108 :**

D'après la formule du crible de l'exercice 57, on a $\text{Card}((A \cup B) \cup C) = \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}((A \cup B) \cap C)$ Or :

- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ ;
- puisque $(A \cup B) \cap B = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, on a égalementCard$((A \cup B) \cap C) = \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}((A \cap C) \cap (B \cap C))$ ;
- enfin, $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

En remplaçant le tout dans la première égalité, on retrouve bien la formule demandée.

**Corrigé exercice 109 :**

1. a. Cette expérience possède 6 issues.
   b. Un événement étant un sous-ensemble de l'univers, il suffit de dénombrer le nombre de parties de cet univers. Puisqu'il est composé de 6 éléments, le nombre de partie de l'univers vaut $2^6 = 64$.
2. a. Le nombre d'issue de cette expérience est le nombre de 6-uplet de $\{0; 1\}$. Il y en a $2^6 = 64$.
   b. Obtenir un nombre pair de fois le nombre 1 signifie que le 6-uplet est composé d'un nombre pair de zéros. Il peut y en avoir 0, 2, 4 ou 6. Il y a $\binom{6}{0} = 1$ issue avec 0 zéro. Il y a $\binom{6}{2} = 15$ issue avec 2 zéros. Il y a $\binom{6}{4} = 15$ issue avec 4 zéros. Il y a $\binom{6}{6} = 1$ issue avec 6 zéros. Au total, il y a 32 issues avec un nombre pair de zéros.

**Corrigé exercice 110 :**

1. Il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ codes possibles.
2. a. Si deux pions sont bien placés et deux sont mal placés : - il y a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités pour désigner les pions bien placés ; - les deux pions restants sont forcément ceux mal placés. Il ne reste donc que 6 positions valides.
   b. Si deux pions sont bien placés et un est mal placé : - il y a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités pour désigner les deux pions bien placés ; - il y a $\binom{2}{1} = 2$ possibilités pour désigner celui qui est mal placé et qui sera donc déplacé sur l'autre case ; - le pion restant devra alors être remplacé par un pion d'une des deux couleurs non utilisés. Finalement, le nombre de possibilités vaut $6 \times 2 \times 2 = 24$.
   c. Si un pion est bien placé et un autre mal placé, il y a : - 4 possibilités pour le pion bien placé ; - 3 possibilités pour le pion mal placé, celui-ci peut alors être déplacé sur un des 2 emplacements restants ; - les deux autres pions sont remplacés par les pions des deux couleurs non utilisées, cela laisse deux possibilités, selon l'ordre dans lequel ces pions sont alors positionnés. Au total, il y a $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ possibilités.

**Corrigé exercice 111 :**

1. Si on tient compte de l'ordre d'arrivée, il y a $10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités.
2. Si on joue sans l'ordre, il y a $\binom{10}{3} = 120$ combinaisons possibles.

**Corrigé exercice 112 :**

1. 18 possède 6 diviseurs positifs (1 ; 18 ; 2 ; 9 ; 3 ; 6) alors que 25 en possède 3 (1 ; 5 ; 25).
2. Dans le cas général, $n$ possède $(p_1+1)\times(p_2+1)\times\ldots\times(p_k+1)$ diviseurs positifs.
3. $120=2^3\times3^1\times5^1$ et a donc $(3+1)\times(1+1)\times(1+1)=16$ diviseurs positifs.
4. On a $35=5\times7=(4+1)\times(6+1)$. Le plus petit entier positif ayant 35 diviseurs et 2 diviseurs premiers distincts vaut $2^6\times3^4$, soit 5 184.

**Corrigé exercice 113 :**

1. Il y a 5 choix pour le premier rotor, 4 pour le deuxième et 3 pour le troisième soit $5\times4\times3=60$ choix de rotors possibles.
2. Puisque chaque rotor à 26 positions différentes, le nombre de positions du triplet de rotors est $26^3=17\,576$.
3. a. On a $\binom{26}{6}=230\,230$ manières de choisir 6 lettres inchangées parmi 26.

   b. Pour réaliser le premier câblage, on choisit deux lettres parmi 20 restantes, soit $\binom{20}{2}$. Pour le deuxième, on a $\binom{18}{2}$ possibilités, puis $\binom{16}{2}$ et ainsi de suite. Or, $\binom{20}{2}\times\binom{18}{2}\times\binom{16}{2}\times\ldots\times\binom{2}{2}=\frac{20!}{2!18!}\times\frac{18!}{2!16!}\times\frac{16!}{2!14!}\times\ldots\times\frac{2!}{2!0!}$ $=\frac{20!}{2^{10}}$. Puisque l'ordre des câblages n'a pas d'importance, il faut encore diviser par 10! pour obtenir le nombre de câblages différents. En effet, pour choisir un câble, on a 10 choix pour le premier, 9 pour le deuxième et ainsi de suite. Le nombre de câblages est donc $\frac{20!}{10!\times2^{10}}=654\,729\,075$.
4. Le nombre de configurations de la machine Enigma est donc $60\times17\,576\times230\,230\times654\,729\,075$ soit $158\,962\,555\,217\,826\,360\,000$, ou environ $1,59\times10^{20}$.

**Corrigé exercice 114 :**

Partie A :

1. a. Pour $n=1$ : $a+b=\binom{1}{0}a^0b+\binom{1}{1}ab^0$.

   b. Pour $n=2$ : $\binom{2}{0}a^0b^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}a^2b^0=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

   c. Pour $n=3$ : $\binom{3}{0}a^0b^3+\binom{3}{1}ab^2+\binom{3}{2}a^2b+\binom{3}{3}a^3b^0=b^3+3ab^2+3a^2b+a^3=(a+b)^3$.

2. a. En manipulant le symbole $\sum$ de façon méthodique, on obtient :

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\ &= (a+b)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i} \\ &= a\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i} + b\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{i+1}b^{k-i} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i+1}\end{aligned}$$

b. On réalise la substitution $i = j+1$ et on obtient :

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{i+1}b^{k-i} = \sum_{j=1}^{k+1}\binom{k}{j-1}a^jb^{k-j+1}.$$

Puis en renommant :

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}a^ib^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i+1}.$$

c. On obtient alors le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}a^ib^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i+1} \\ &= \binom{k}{0}a^0b^{k+1}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i-1}a^ib^{k-i+1} + \binom{k}{0}a^{k+1}b^0\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^ib^{k-i+1} \\ &= b^{k+1} + a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\left(\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}\right)a^ib^{k-i+1}\end{aligned}$$

d. Comme (d'après la formule de Pascal), on a $\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$ alors :

$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^ib^{k-i+1}$

e. On a donc $(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^ib^{k+1-i}$ et on a montré la formule du binôme de Newton par récurrence.

Partie B :

- On obtient :

$$\begin{aligned}(a+2)^3 &= 2^3 + 3\times 2^2a + 3\times 2a^2 + a^3 \\ &= a^3 + 6a^2 + 12a + 8\end{aligned}$$

- Ainsi que :

$$\begin{aligned}(a+2)^5 &= 2^5 + 5\times 2^4a + 10\times 2^3a^2 + 10\times 2^2a^3 + 5\times 2a^4 + a^5 \\ &= a^5 + 10a^4 + 40a^3 + 80a^2 + 80a + 32\end{aligned}$$

**Corrigé exercice 115 :**

1. On a $\binom{n+k-1}{k}$ possibilités pour choisir les places des 1.

2. Reprenons l'exemple donné dans l'énoncé : $A = \{a; b; c; d\}$ (donc $n = 4$) et $k = 6$. On souhaite avoir le $n-$uplet $(0; 2; 3; 1)$ On a alors $n+k-1 = 9$. On construit donc le mot 000 000 000. Pour faire correspondre ce mot au $n-$uplet précédent, on remplace les 0 par un nombre de 1 correspondant aux différentes composantes du $n-$uplet. Ici, ça donne : 011 011 101. Le premier 0 indique que la première composante du $n-$uplet est 0. Ensuite, il y a deux 1 donc la deuxième composante est 2. Puis, le 0 est utilisé comme un “espace”. Il y a ensuite trois 1 puis un “espace” puis un seul 1. Donc les deux dernières composantes sont 3 et 1. Le $n-$uplet obtenu est bien $(0; 2; 3; 1)$.

   On peut utiliser cette méthode pour tous les $n-$uplets.

3. Pour créer le mot de départ avec les 0, on utilise $n + k - 1$ zéros. Parmi ceux-là, on en change $k$qui deviennent des 1. Dans la question 2, on a vu qu'à chacun de ces mots correspond une combinaison à $k$ éléments de $A$, avec répétitions. Ce nombre de combinaisons est donc bien $\binom{n+k-1}{k}$.

4. Ici, on a $n = 4$ et $k = 10$. $n + k - 1 = 13$ donc le nombre de bouquets possible est $\binom{13}{10} = 286$.

5. L'idée ici est d'avoir un mot avec cinquante 0 puis de modifier uniquement deux 0 en 1. On obtient ainsi trois groupes de 0 séparés par ces 1 (trois groupes car on recherche un triplet). Le nombre $x$ est égal au nombre de 0 du premier groupe (en lisant de gauche à droite). Le nombre $y$ est égal au nombre de 0 du 2e groupe augmenté d'une unité (le premier 1 de séparation). Le nombre $z$ est égal au dernier groupe de 0 avec le dernier 1. On aura bien $x + y + z = 50$ puisque nous avions cinquante zéros au départ.

   Ainsi, déterminer le nombre de triplet revient à déterminer le nombre de possibilité de remplacer deux 0 parmi cinquante, soit $\binom{50}{2} = 1\,225$.

   Exemple plus court avec $x + y + z = 10$. On écrit le mot constitué de dix 0 : 0 000 000 000. On remplace deux 0 par des 1 (n'importe lesquels) : 0 001 010 000. On a alors : $x = 3$ ; $y = 2$ et $z = 5$. On a bien $3 + 2 + 5 = 10$. Le nombre de triplets $(x; y; z)$ tels que $x + y + z = 10$ est $\binom{10}{2} = 45$.