Livre du professeur - Mathématiques
Chapitre 10 : Primitives - Équations différentielles

Table des matières

1 Informations sur ce chapitre

Le B.O. précise que l'analyse est une branche centrale des mathématiques et un outil puissant de modélisation qui permet l'étude de phénomènes issus d'autres disciplines.
Les équations différentielles sont introduites sur des cas simples en tant qu'équations dont l'inconnue est une fonction. L'équation $y' = f$ permet d'introduire la notion de primitive, la recherche d'une primitive étant associée au « problème inverse » de la dérivation. Les équations du type $y' = ay + b$ ont une importance considérable dans des problèmes de modélisation.
Ainsi, ce chapitre commence naturellement par la présentation de la notion d'équation différentielle, et propose ensuite un tableau de primitives obtenu par lecture inverse du tableau de dérivées.
Les exercices proposés sont très calculatoires au départ, pour permettre aux élèves de bien maîtriser les techniques de calcul. Une fois les automatismes acquis, les problèmes de modélisation, présents plutôt en fin de chapitre, pourront être abordés pour découvrir un nouvel aspect des équations différentielles.

2 Avant de commencer

2.1 Corrigés des exercices

Corrigé exercice 1 :

On a $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2$.
On a $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_{g'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie mais non dérivable en 0 donc $\mathcal{D}_h = [0; +\infty[$, $\mathcal{D}_{h'} =]0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
On a $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k'} = \mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
On a $\mathcal{D}_\ell = \mathcal{D}_{\ell'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ell'(x) = \mathrm{e}^x$.

Corrigé exercice 2 :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. On a $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$.

Corrigé exercice 3 :

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie mais non dérivable en 0. La fonction $x \mapsto 3x + 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par produit, $\mathcal{D}_g = [0; +\infty[$ et $\mathcal{D}_{g'} =]0; +\infty[$. La fonction $f : x \mapsto u(x)v(x)$ admet comme dérivée la fonction $f' : x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ sur son ensemble de dérivation. Ainsi, en posant $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 3x + 2$ on obtient, pour tout $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) + \sqrt{x} \times 3 = \frac{3x+2+3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+2}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(9x+2)}{2x}$.

Corrigé exercice 4 :

La fonction h n'est pas définie ni dérivable en 0 donc $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_{h'} = \mathbb{R}^*$. La fonction h est de la forme $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Or la dérivée d'une telle fonction sur son ensemble de dérivation est donnée par $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1>0$ donc $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k'} = \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ admet comme dérivée la fonction $f' : x \mapsto \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ sur son ensemble de dérivation. Ainsi, en posant $u(x) = x^2+x+1$ et $v(x) = x^2+1$ on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k'(x) = \frac{(2x+1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Corrigé exercice 5 :

On rappelle que la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ admet comme dérivée la fonction $f' : x \mapsto a \times g'(ax+b)$ sur son ensemble de dérivation. En appliquant cette formule, on obtient $\mathcal{D}_u = \mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 4 \times (-3)\,(2-3x)^{4-1} = -12\,(2-3x)^3$. $v(x)$ existe si, et seulement si, $1-2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{D}_v = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc $\mathcal{D}_{v'} = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$. En appliquant la formule donnée ci-dessus, on a, pour tout $x < \frac{1}{2}$, $v'(x) = \frac{(1-2x)'}{2\sqrt{1-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$.

Corrigé exercice 6 :

On rappelle que, pour tous a et b appartenant à $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$, $\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$ et $\left(\mathrm{e}^a\right)^b = \mathrm{e}^{ab}$. On en déduit les réponses suivantes.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{3x+2} \times \mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{3x+2-4x} = \mathrm{e}^{2-x}$
2. $g(x) = \frac{\mathrm{e}^{5x+2}}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{5x+2-2} = \mathrm{e}^{5x}$
3. $h(x) = \left(\mathrm{e}^{x+1}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2(x+1)} \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{2x+2-2x} = \mathrm{e}^2$
4. $k(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{2x-1} \times \mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{3x+1-2x+1-2} = \mathrm{e}^x$

Corrigé exercice 7 :

La fonction f est le produit de $x \mapsto x$, fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$, par la composée de $x \mapsto -2x$ avec la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x} + x \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x} + 2x\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$.

Corrigé exercice 8 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$ donc $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$. La dérivée des fonctions de la forme $x \mapsto g(h(x))$ est donnée par $x \mapsto h'(x)g'(h(x))$. On obtient ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)}$.
v est une fonction polynôme donc $\mathcal{D}_v = \mathbb{R}$. En utilisant la même formule, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v'(x) = 4\,(2x+1)\,(x^2+x+1)^{4-1} = 4\,(2x+1)\,(x^2+x+1)^3$. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_w = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule de dérivation d'une composition donne $w'(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{x^2+x+1}$.

Corrigé exercice 9 :

1. La fonction f est la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ par la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^{2x}$. La fonction g est le produit de $x \mapsto -1$, fonction constante dérivable sur $\mathbb{R}$, par la

composée de la fonction affine $x \mapsto 1-2x$ avec la fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{g'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -(-2)\,e^{1-2x} = 2e^{1-2x}$.

2.
   a. Pour tous a et b appartenant à $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ si, et seulement si, $a = b$. Donc $e^{2x} = e^{1-2x} \Leftrightarrow 2x = 1-2x \Leftrightarrow 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.
   b. Soit a un réel. Les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse a sont respectivement $f'(a)$ et $g'(a)$. D'après la question précédente, $f'(a) = g'(a) \Leftrightarrow 2e^{2a} = 2e^{1-2a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$. On a donc $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{e} = g'\left(\frac{1}{4}\right)$. Cela signifie qu'au point d'abscisse $\frac{1}{4}$, les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont le même coefficient directeur : $2\sqrt{\mathrm{e}}$. On en conclut que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{1}{4}$ sont parallèles.

3 Activités

3.1 Activité A : Un nouveau type d'équation

1. La fonction f est le produit de $u : x \mapsto 3$, fonction constante dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de $v : x \mapsto 2x$, fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$, par la fonction exponentielle, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 2\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$f'(x) - 2f(x) = 6\mathrm{e}^{2x} - 2 \times 3\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^{2x} = 0$. La fonction f vérifie donc bien l'égalité $f' - 2f = 0$.

2. a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 4\mathrm{e}^{4x} = 12\mathrm{e}^{4x}$. Donc on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4f(x) - 6 = 4\left(3\mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{2}\right) - 6 = 12\mathrm{e}^{4x} + 6 - 6 = 12\mathrm{e}^{4x} = f'(x)$. f est donc solution de l'équation différentielle $y' = 4y - 6$.
   b. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 4\mathrm{e}^{x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$4g(x) - 6 = 4(4\mathrm{e}^{x} - 6) - 6 = 16\mathrm{e}^{x} - 24 - 6 = 16\mathrm{e}^{x} - 30 \neq g'(x)$. Donc g n'est pas solution de l'équation $y' = 4y - 6$.
   c. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 5 \times 4\mathrm{e}^{4x} = 20\mathrm{e}^{4x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$4h(x) - 6 = 4\left(5\mathrm{e}^{4x} + \frac{3}{2}\right) - 6 = 20\mathrm{e}^{4x} + 6 - 6 = 20\mathrm{e}^{4x} = h'(x)$. Donc h est solution de l'équation $y' = 4y - 6$.

Bilan :

Une équation différentielle est une équation dont les solutions sont des fonctions dérivables. Il n'y a pas unicité de la solution. En effet, f et h, par exemple, sont solutions de la même équation différentielle $y' = 4y - 6$.

3.2 Activité B : Mouvement rectiligne

Questions :

Partie A

1. On commence par convertir les vitesses en km·h^{-1} en m·s^{-1} : 61,2 km·h^{-1} $= \frac{61200}{3600}$ m·s^{-1} $=$ 17 m·s^{-1} ; 244,8 km·h^{-1} $= \frac{244800}{3600}$ m·s^{-1} $=$ 68 m·s^{-1}. On utilise ensuite la formule donnée dans le bloc aide : $a(t) = \frac{68-17}{150} = 0,34$ m·s^{-2}.

2. On cherche v tel que, pour tout $0 \leqslant t \leqslant 150$, $v'(t) = 0,34$. C'est une équation différentielle dont les solutions sont de la forme $v(t) = 0,34t + k$, où k est un réel. On remarque en effet que, si on dérive cette expression, on obtient bien $v'(t) = 0,34$. On sait, de plus, qu'au temps $t = 0$, la vitesse du train est de 17 m·s^{-1}. Cela nous permet de déterminer la valeur de la constante k : $v(0) = 17 \Leftrightarrow k = 17$ donc $v(t) = 0,34t + 17$.

3. On pose : pour tout $t \in [0;150]$, $x(t) = 0,34 \times \frac{t^2}{2} + 17t + k = 0,17t^2 + 17t + k$, où k est un réel. On a bien $x'(t) = 0,34t + 17$. Au temps $t = 0$, on a $x(0) = 0$ d'où $k = 0$. On a donc au final, pour tout $t \in [0;150]$, $x(t) = 0,17t^2 + 17t$.

4. Au bout de 150 secondes, le TGV a parcouru $x(150) = 0,17 \times 150^2 + 17 \times 150 = 6375$ mètres.

   Partie B

1. Par hypothèse $a(t) = -0,75$ m·s^{-2}. On cherche donc v tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $v'(t) = -0,75$. Pour tout $t \geqslant 0$, soit $v(t) = -0,75t + k$, où k est un réel. De plus, au temps $t = 0$, le train se déplace avec une vitesse de 84 m·s^{-1}. D'où $v(0) = 84 \Leftrightarrow k = 84$, et donc $v(t) = -0,75t + 84$. Le train sera à l'arrêt lorsque sa vitesse sera nulle. On cherche donc $t \geqslant 0$ tel que $v(t) = 0$: $-0,75t + 84 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{84}{0,75} = 112$ secondes. Le train sera à l'arrêt au bout de 112 secondes.

2. On cherche maintenant $x(t)$, pour $t \geqslant 0$, tel que $x'(t) = -0,75t + 84$. On a donc $x(t) = -0,75 \times \frac{t^2}{2} + 84t + k = -0,375t^2 + 84t + k$, avec k un réel. De plus $x(0) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ donc $x(t) = -0,375t^2 + 84t$.

3. Pendant les 112 secondes de freinage, le TGV a parcouru $x(112) = -0,375 \times 112^2 + 84 \times 112 = 4704$ mètres soit environ 4,7 kilomètres.

Bilan :

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto at$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction constante $t \mapsto a$, avec a réel.

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto m\frac{t^2}{2} + pt$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction affine $t \mapsto mt + p$, avec m et $p$réels.

3.3 Activité C : Circuit électrique RL

Questions :

1. On a $U = Li'(t) + Ri(t) \Leftrightarrow Li'(t) = -Ri(t) + U \Leftrightarrow i'(t) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{U}{L}$, ce qui correspond bien à une expression de la forme $x' = mx + p$, avec $m = -\frac{R}{L}$ et $p = \frac{U}{L}$.

2. Pour tout $t \geqslant 0$, $-\frac{R}{L}\left(i(t) - \frac{U}{R}\right) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{R}{L} \times \frac{U}{R} = i'(t)$.

3. a. La dérivée de $x \mapsto -\frac{U}{R}$ est égale à 0 car il s'agit d'une fonction constante. On a donc, pour tout $t \geqslant 0$, $y'(t) = i'(t)$.

   b. En remplaçant $y(t)$ par son expression, on obtient, pour tout $t \geqslant 0$, $-\frac{R}{L}y(t) = -\frac{R}{L}\left(i(t) - \frac{U}{R}\right) = i'(t) = y'(t)$. Donc y est solution de l'équation (E_2) : $y' = -\frac{R}{L}y$.

4. a. Comme (E_2) est de la forme $y' = ay$, ses solutions sont de la forme $t \mapsto c\mathrm{e}^{at}$, où c est réel. On a ainsi $y(t) = c\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$.

   b. On utilise la relation entre $y(t)$ et $i(t)$. Pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) = i(t) - \frac{U}{R} \Leftrightarrow i(t) = y(t) + \frac{U}{R} = \frac{U}{R} + c\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$.

5. $i(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{U}{R} + c\mathrm{e}^0 = 0 \Leftrightarrow \frac{U}{R} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{U}{R}$.

6. En remplaçant dans l'expression de i la valeur de c par celle obtenue dans la question précédente, on obtient, pour tout $t \geqslant 0$, que $i(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

7. La fonction i définie, pour tout $t \geqslant 0$, par $i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$. Et, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $i'(t) = \frac{U}{R} \times \frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$. D'où $L \times i'(t) + R \times i(t) = L \times \frac{U}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + R \times i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) = U\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + U - U\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = U$. Donc la fonction i vérifie bien l'équation différentielle. De plus, $i(0) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}0}\right) = \frac{U}{R}(1-1) = 0$. Donc i vérifie aussi la condition initiale.

Bilan :

Lorsqu'on doit résoudre une équation différentielle de la forme $x' = mx+p$, on peut utiliser la fonction intermédiaire $y = x + \frac{p}{m}$ qui permet de transformer l'équation différentielle initiale en une équation différentielle du type $y' = my$. En effet, $y = x + \frac{p}{m} \Leftrightarrow x = y - \frac{p}{m}$ et on a $y' = x'$ (car $\frac{p}{m}$ est une constante). Et l'équation $x' = mx + p$ s'écrit alors $y' = m\left(y - \frac{p}{m}\right) + p \Leftrightarrow y' = my - p + p \Leftrightarrow y' = my$. Cette équation différentielle, qui est équivalente à l'équation différentielle initiale, peut être facilement résolue.

4 Auto-évaluation

Corrigé exercice 10 :

f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Puisque, par abus de notation, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$ et $(x)' = 1$, f admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $x \mapsto x^3 - x^2 + x + k$, où k est un réel. En prenant $k = 0$, on obtient alors que $x \mapsto x^3 - x^2 + x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Réponse : c}}$

Corrigé exercice 11 :

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 3e^{3x}$. Soient maintenant les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $u(x) = 3x$ et $v(x) = e^x$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathcal{D}_{v'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = e^x$. Donc $f = u' \times (v' \circ u)$ et admet donc pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $x \mapsto v \circ u\,(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Les solutions de $y' = f$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{3x} + k$, où k est un réel. Pour finir, on calcule k : $F(0) = -1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 + k = -1 \Leftrightarrow 1 + k = -1 \Leftrightarrow k = -2$. La solution F de l'équation différentielle $y' = 3e^{3x}$ telle que $F(0) = -1$ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{3x} - 2$.

$\boxed{\text{Réponse : b}}$

Corrigé exercice 12 :

L'équation différentielle $y' + 3y = 0$, que l'on peut aussi écrire $y' = -3y$, admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-3x}$, où C est un réel.

$\boxed{\text{Réponse : a}}$

Corrigé exercice 13 :

L'équation $(E) : y' = 2y+3$ est de la forme $y' = ay+b$ dont les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel. Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{2x} - \frac{3}{2}$, où C est un réel.

$\boxed{\text{Réponse : c}}$

Corrigé exercice 14 :

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 2x\,(x^2+1)^2$. Soient maintenant les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathcal{D}_{v'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = x^2$. Donc $f = u' \times (v' \circ u)$ et admet donc pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions de la forme $x \mapsto v \circ u\,(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$. Les solutions de $y' = f$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{(x^2+1)^3}{3} + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Réponses : b et d}}$

Corrigé exercice 15 :

Les solutions de $y' = \mathrm{e}y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{\mathrm{e}x}$, où C est un réel. Pour $C = 0$, on obtient la solution $x \mapsto 0$. Pour $C = 1$, on obtient la solution $x \mapsto e^{\mathrm{e}x}$. Pour $C = 2$, on obtient la solution $x \mapsto 2e^{\mathrm{e}x}$. Pour $C = 2\mathrm{e}$, on obtient la solution $x \mapsto 2\mathrm{e} \times e^{\mathrm{e}x}$ et $2\mathrm{e} \times e^{\mathrm{e}x} = 2\mathrm{e}^1 \times e^{\mathrm{e}x} = 2e^{\mathrm{e}x+1}$.

Réponses : a, b, c et d

Corrigé exercice 16 :

L'équation différentielle (E) : $y' - \mathrm{e}y = \mathrm{e} \Leftrightarrow y' = \mathrm{e}y + \mathrm{e}$ est de la forme $y' = ay + b$ dont les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel. Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{\mathrm{e}x} - 1$, où C est un réel. Pour $C = 1$, on obtient la solution $x \mapsto e^{\mathrm{e}x} - 1$. Pour $C = 2$, on obtient la solution $x \mapsto 2e^{\mathrm{e}x} - 1$. Pour $C = -1$, on obtient la solution $x \mapsto -e^{\mathrm{e}x-1}$.

Réponses : a, c et d

Corrigé exercice 17 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 - 1)\,e^{-x}$. Alors cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 1$ par la composée de la fonction affine $x \mapsto -x$ avec la fonction exponentielle, toutes dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2xe^{-x} + (x^2 - 1) \times (-1) \times e^{-x} = (-x^2 + 2x + 1)\,e^{-x}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = (-x^2 + 2x + 1)\,e^{-x} + 2\,(x^2 - 1)\,e^{-x} = (-x^2 + 2x + 1 + 2x^2 - 2)\,e^{-x}$ $= (x^2 + 2x - 1)\,e^{-x}$. Donc φ est une solution particulière de l'équation (E) : $y' + 2y = (x^2 + 2x - 1)\,e^{-x}$.
L'équation homogène associée $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-2x}$, où C est un réel. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-2x} + (x^2 - 1)\,e^{-x}$, où C est un réel.
Pour $C = 0$, on obtient alors la solution $x \mapsto (x^2 - 1)\,e^{-x}$; et pour $C = 1$, la solution $x \mapsto e^{-2x} + (x^2 - 1)\,e^{-x}$.

Réponses : c et d

Corrigé exercice 18 :

1. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de la fonction affine $x \mapsto x$ par la composée de la fonction affine $x \mapsto 3x$ par la fonction exponentielle, ces fonctions étant toutes dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (3x + 1)\,e^{3x}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) - 3\varphi(x) = (3x + 1 - 3x)\,e^{3x} = e^{3x}$. Et donc φ est bien une solution particulière de (E).

2. Les solutions de l'équation homogène associée (E_0) : $y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$ sont les solutions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{3x}$, où C est un réel.

3. Soit y solution de (E). Alors $y - \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $(y - \varphi)' - 3\,(y - \varphi) = (y' - 3y) - (\varphi' - 3\varphi) = e^{3x} - e^{3x} = 0$ car y et φ sont solutions de (E). Donc $y - \varphi$ est solution de (E_0). Réciproquement, soit $y - \varphi$

solution de (E_0). Alors $y = y - \varphi + \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $y' - 3y = (y - \varphi + \varphi)' - 3(y - \varphi - \varphi) = \big((y - \varphi)' - 3(y - \varphi)\big) + \varphi' - 3\varphi = \varphi' - 3\varphi$ car $y - \varphi$ est solution de (E_0). Or, φ est solution de (E) donc $\varphi' - 3\varphi = e^{3x}$. Et donc $y' - 3y = e^{3x}$. Ainsi y est bien solution de (E).

4. Par conséquent, les solutions de (E) s'écrivent comme somme de φ et d'une solution de (E_0). Ce sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (x + C)\, e^{3x}$, où C est un réel.

5. Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F_C : x \mapsto (x + C)\, e^{3x}$, où C est un réel. On cherche maintenant $C \in \mathbb{R}$ tel que $F_C\left(\frac{1}{3}\right) = \mathrm{e}$, c'est à dire $\left(\frac{1}{3} + C\right) e^{3 \times \frac{1}{3}} = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}\left(\frac{1}{3} + C\right) = \mathrm{e} \Leftrightarrow C = \frac{2}{3}$. En conclusion, la solution F de (E) telle que $F\left(\frac{1}{3}\right) = \mathrm{e}$ est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right) e^{3x}$.

5 TP/TICE

5.1 Corrigé du TP 1

Questions préliminaires

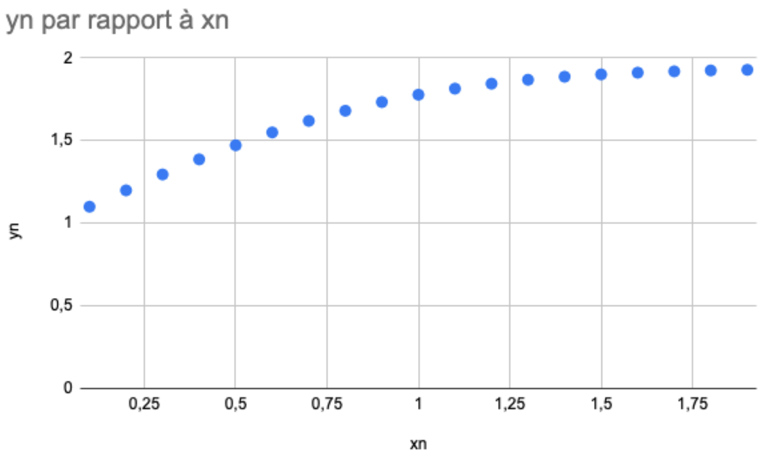
1. $x_1 = x_0 + h = h$ et $x_2 = x_1 + h = 2h$.
2. Par définition, $f'(x_n) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_n+h)-f(x_n)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h}$. Donc, si h est proche de 0, $\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h} \approx f'(x_n)$.
3. D'après la question précédente, on a $f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{h}$, lorsque h est proche de 0. Ce qu'on peut réécrire $f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + hf'(x_n)$. Or, puisque f est solution de $(E) : y' = \mathrm{e}^{-x^2}$, on a bien $f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + h\mathrm{e}^{-x_n^2}$, lorsque h est proche de 0.
4. a. Les points $P_n(x_n; y_n)$ approchent les points $M_n(x_n; f(x_n))$ en utilisant l'approximation de la question précédente. En remplaçant $f(x_n)$ par y_n et $f(x_{n+1})$ par y_{n+1}, on obtient bien $y_{n+1} = y_n + h\mathrm{e}^{-x_n^2}$.
   b. Étant donné que $f(0) = 1$, on doit avoir $y_0 = 1$.
   c. En utilisant la formule, on obtient $y_1 = y_0 + hf'(x_0) = 1 + hf'(0) = 1 + h\mathrm{e}^0 = 1 + h$ et $y_2 = y_1 + hf'(x_1) = 1 + h + hf'(h) = 1 + h + h\mathrm{e}^{-h^2} = 1 + h\left(1 + \mathrm{e}^{-h^2}\right)$.

Méthode 1 : Tableur

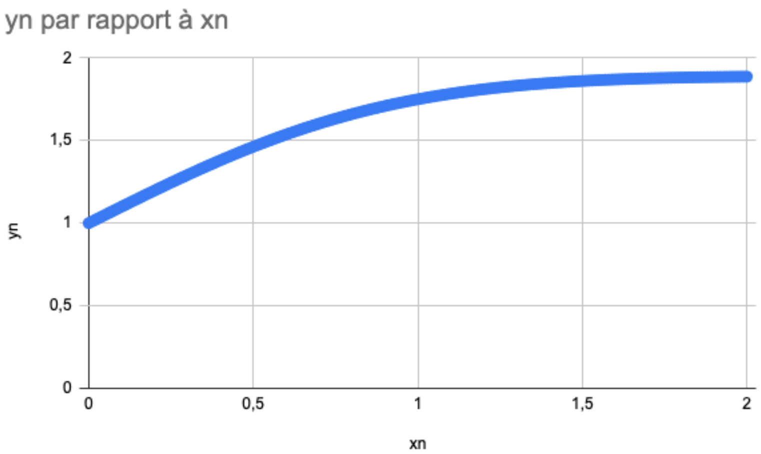
1. On entre en D2 la valeur de h (dans ce cas $h = 0,1$). On pourra ainsi utiliser la cellule D2 dans la suite de cette méthode (en n'oubliant pas d'utiliser le symbole « $ » avant le chiffre, afin de fixer la cellule quand on la recopie vers le bas). On entre respectivement en B3 et C3 les formules : =B2+D$2 et =C2+D$2*exp(-B2*B2). En étirant ces formules vers le bas, on obtient le tableau suivant.

	A	B	C	D
1	n	xn	yn	Pas h
2	0	0	1	0,1
3	1	0,1	1,1	
4	2	0,2	1,199004983	
5	3	0,3	1,295083927	
6	4	0,4	1,386477046	
7	5	0,5	1,471691425	
8	6	0,6	1,549571503	
9	7	0,7	1,619339136	
10	8	0,8	1,680601775	
11	9	0,9	1,733331017	
12	10	1	1,777816824	
13	11	1,1	1,814604768	
14	12	1,2	1,844424496	
15	13	1,3	1,868117272	
16	14	1,4	1,886569224	
17	15	1,5	1,900655066	
18	16	1,6	1,911194989	
19	17	1,7	1,918925463	
20	18	1,8	1,924483084	
21	19	1,9	1,928399474	
22	20	2	1,931104658	

2. En sélectionnant les données des colonnes B et C et en utilisant l'outil d'insertion de graphique du tableur, on obtient la courbe suivante.



Ces points représentent donc une approximation de la primitive de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Pour obtenir une approximation plus précise, il est possible de réduire le pas h utilisé (voir ci-dessous l'approximation avec $h = 0,01$).



Méthode 2 : Python

1. On veut diviser l'intervalle $[0;2]$ en 20 intervalles pour obtenir 21 points d'abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_{20}$. On a donc $h = \frac{2-0}{20} = 0,1$.

2. On utilise la formule $y_{n+1} = y_n + he^{-x_n{}^2}$ démontrée dans les questions préliminaires, pour créer la fonction approximation.

```python
from math import exp

def approximation(x,y,h):
    return(y+h*exp(-x**2))
```

3. a. Voici un programme possible.

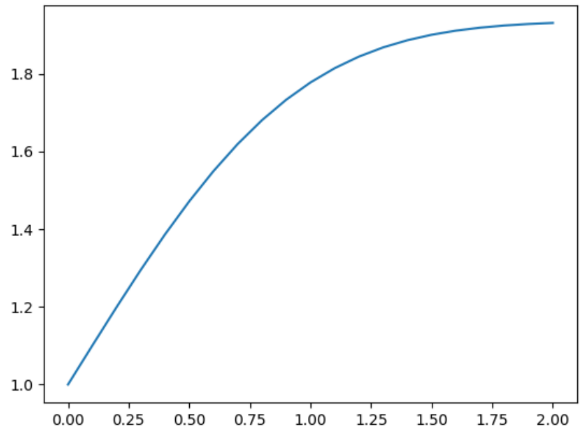
```python
from math import exp

def approximation(x,y,h):
    return(y+h*exp(-x**2))

def Euler(x0, y0, h):
    print(x0, y0)
    while x0 <= 2 :
        y0 = approximation(x0, y0, h)
        x0 = x0 + h
        print(x0, y0)

Euler(0, 1, 0.1)
```

   b. On commence par importer le module matplotlib avec la commande import matplotlib.pyplot as plt. Il faut ensuite modifier la fonction Euler pour qu'elle retourne deux listes contenant respectivement les différentes de x_n et de y_n. Voici un programme possible.

```python
from math import exp
import matplotlib.pyplot as plt

def approximation(x,y,h):
    return(y + h*exp(-x**2))

def Euler(x0, y0, h):
    yn = [1]
    xn = [0]
    while x0 <= 2 :
        y0 = approximation(x0, y0, h)
        x0 = x0 + h
        yn.append(y0)
        xn.append(x0)
    return xn, yn

fig = plt.figure()
ax = plt.axes()
xn, yn = Euler(0, 1, 0.1)
ax.plot(xn, yn)
plt.show()
```

Les commandes des lignes 17 à 20 permettent respectivement de :

- créer un repère pour tracer une courbe ;
- récupérer les valeurs x_n et y_n renvoyées par la fonction Euler ;
- représenter les points de coordonnées $(x_n ; y_n)$ dans le repère ;
- afficher la figure.



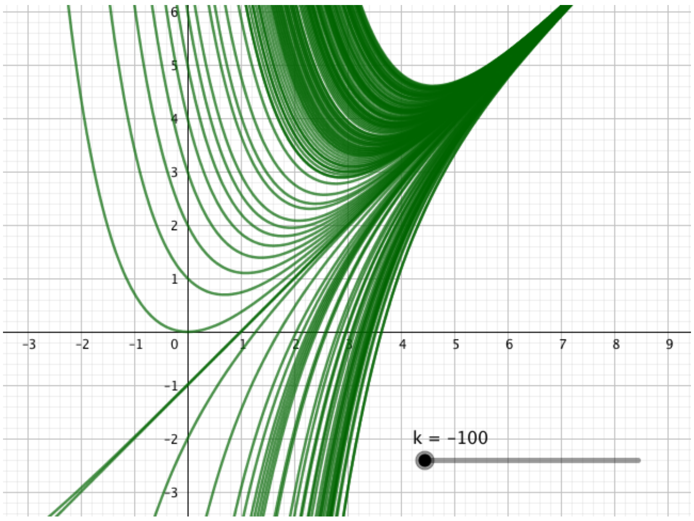
5.2 Corrigé du TP 2

Questions préliminaires :

1. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = mx + p$, avec m et p deux réels à déterminer. φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m + mx + p = x$. On résout alors le système $\begin{cases} m = 1 \\ m + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ p = -m = -1 \end{cases}$ et on obtient que la fonction φ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x - 1$, est solution de l'équation (E).
2. Les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, et de la forme $x \mapsto k\mathrm{e}^{-x}$, où k est constante réelle. Or, les solutions de (E) sont données par la somme d'une solution de l'équation homogène (E_0) et d'une solution particulière de (E). On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f_k, où k est un réel, définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\mathrm{e}^{-x} + x - 1$.
3. $f_{k_0}(0) = 1 \Leftrightarrow k_0\mathrm{e}^0 + 0 - 1 = 1 \Leftrightarrow k_0 = 2$. La solution f_{k_0} de (E) telle que $f_{k_0}(0) = 1$ est donc f_2, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_2(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + x - 1$.

Méthode 1 : Geogebra

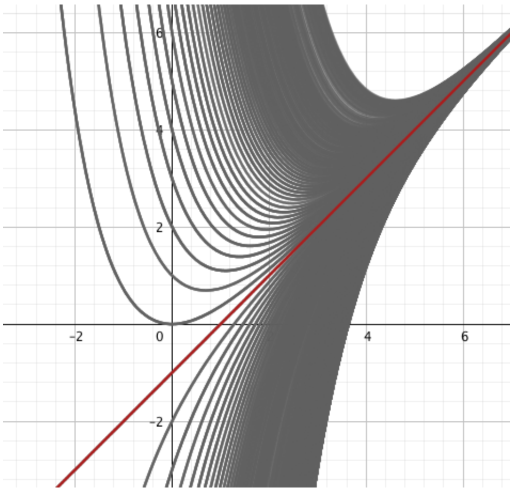
1. a.
   b. On obtient les courbes ci-dessous.



   c. On peut conjecturer que :
      - pour $k \leqslant 0$, f_k est croissante sur $\mathbb{R}$;
      - pour $k > 0$, f_k est décroissante sur $]-\infty; \alpha_k]$ et croissante sur $]\alpha_k; +\infty[$ avec $\alpha_k = \ln(k)$.

   d. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) = -f_k(x)+x = -k\mathrm{e}^{-x}-x+1+x = 1-k\mathrm{e}^{-x}$. On procède ensuite par disjonction de cas : 1er cas : $k \leqslant 0$ Dans ce cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-k\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - k\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 > 0$ et donc, pour tout $k \leqslant 0$, f_k est croissante sur $\mathbb{R}$. 2nd cas : $k > 0$ Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - k\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant k\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant k \Leftrightarrow x \geqslant \ln(k)$. On en déduit que, pour tout $k > 0$, f_k est décroissante sur $]-\infty; \ln(k)]$ et croissante sur $]\ln(k); +\infty[$.

2. a. On obtient les courbes ci-dessous.



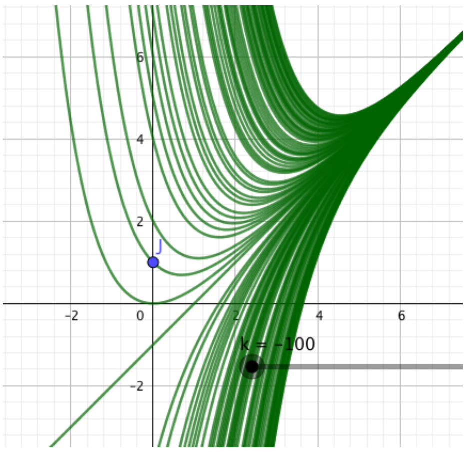
On peut alors conjecturer que :

- pour $k < 0$, $\mathcal{C}_k$ est en dessous de Δ ;
- pour $k > 0$, $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de Δ ;
- pour $k = 0$, $\mathcal{C}_k$ et Δ sont confondues.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, étudions le signe de $f_k(x) - (x-1) = k\mathrm{e}^{-x}$. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, alors cette expression est du signe de k. On en déduit que :

- si $k < 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) - (x-1) < 0 \Leftrightarrow f_k(x) < x - 1$ donc $\mathcal{C}_k$ est en dessous de Δ ;
- si $k > 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) - (x-1) > 0 \Leftrightarrow f_k(x) > x - 1$ donc $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de Δ ;
- pour $k = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = x - 1$ donc $\mathcal{C}_k$ et Δ sont confondues.

3. a. On obtient la figure ci-dessous.

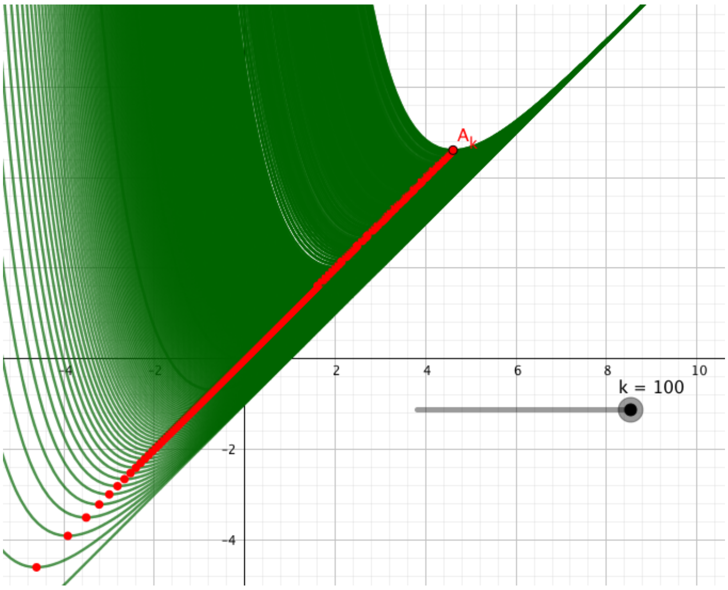


On peut donc conjecturer qu'une seule courbe $\mathcal{C}_k$ passe par le point $J(0;1)$.

b. $f_k(0) = 1 \Leftrightarrow k\mathrm{e}^0 - 1 = 1 \Leftrightarrow k = 2$ Donc $\mathcal{C}_2$ est l'unique courbe $\mathcal{C}_k$ passant par le point $J(0;1)$.

4. a. Dans la question 1.d. on a montré que, pour tout $k > 0$, f_k est décroissante sur $]-\infty; \ln(k)]$ et croissante sur $]\ln(k); +\infty[$. D'où, pour tout $k > 0$, f_k admet un minimum atteint en $x = \ln(k)$.

   b. On obtient la figure ci-dessous.



   L'ensemble des points A_k de $\mathcal{C}_k$ d'abscisse $\ln(k)$, pour $k > 0$, semble être la droite d'équation $y = x$.

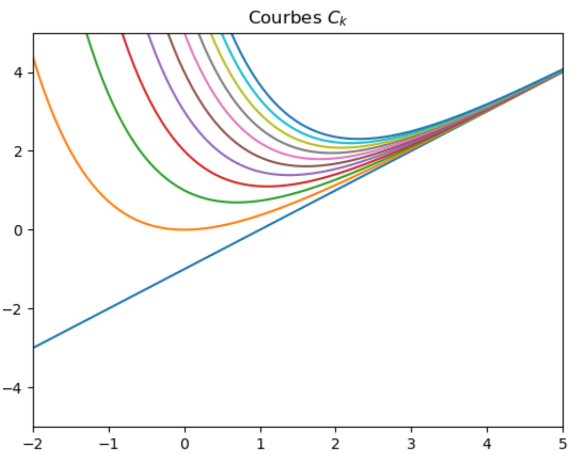
   c. Soit $k > 0$. Par définition, puisque $A_k \in \mathcal{C}_k$, A_k a pour coordonnées $(\ln(k); f_k(\ln(k)))$. Or, $f_k(\ln(k)) = k\mathrm{e}^{-\ln(k)} + \ln(k) - 1 = \frac{k}{\mathrm{e}^{\ln(k)}} + \ln(k) - 1 = \frac{k}{k} + \ln(k) - 1 = \ln(k)$. Donc, A_k appartient bien à la droite d'équation $y = x$.

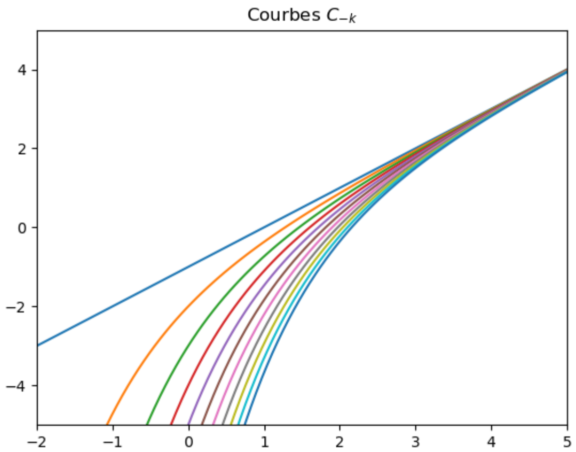
Méthode 2 : Python

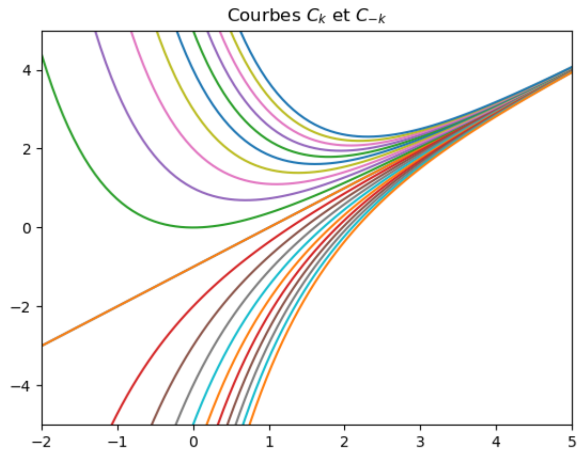
1. Le programme Python ci-dessous fonctionne.

```
def solution(k,x):
    y=k*exp(-x)+x-1
    return y
```

2. a. On obtient les courbes ci-dessous.







b. On peut conjecturer que, pour $k > 0$, la courbe $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_{-k}$.

c. Soit $k > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) - f_{-k}(x) = k\mathrm{e}^{-x} + x - 1 - (-k\mathrm{e}^{-x} + x - 1) = 2k\mathrm{e}^{-x} > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) - f_{-k}(x) > 0 \Leftrightarrow f_k(x) > f_{-k}(x)$. D'où, pour $k > 0$, la courbe $\mathcal{C}_k$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_{-k}$.

3. a. La fonction solution renvoie `y_0= 0.0` . Donc l'image de 0 par f_1 est 0.

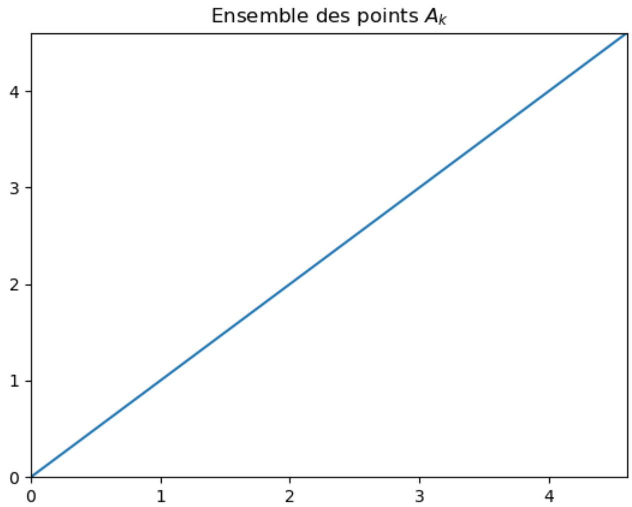
b. Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 passe par le point $O(0; 0)$.

4. a. Soit $k > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_k(x) = -f_k(x) + x = -k\mathrm{e}^{-x} - x + 1 + x = 1 - k\mathrm{e}^{-x}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_k(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - k\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant k\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} \geqslant k \Leftrightarrow x \geqslant \ln(k)$. On en déduit que, pour tout $k > 0$, f_k est décroissante sur $]-\infty; \ln(k)]$ et croissante sur $]\ln(k); +\infty[$. D'où, pour tout $k > 0$, f_k admet un minimum atteint en $x = \ln(k)$.

b. Le programme Python ci-dessous permet d'obtenir les valeurs souhaitées.

```
abscisse=[log(k) for k in range(1,101)]
ordonnee=[solution(k,log(k)) for k in range(1,101)]

#on affiche les coordonnees des points A_k
for i in range (0,100):
    print(abscisse[i], ordonnee[i])
```

On peut alors conjecturer que, pour tout $k > 0$, l'ordonnée de A_k est égale à son abscisse : $\ln(k)$.



c. Soit $k > 0$. Par définition, puisque $A_k \in \mathcal{C}_k$, A_k a pour coordonnées $(\ln(k); f_k(\ln(k)))$. Or, $f_k(\ln(k)) = k\mathrm{e}^{-\ln(k)} + \ln(k) - 1 = \frac{k}{k} + \ln(k) - 1 = \ln(k)$. Donc, A_k appartient bien à la droite d'équation $y = x$.

6 Exercices d'applications directes

6.1 Exercices à l'oral

Corrigé exercice 19 :

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x + 1$ et $g(x) = 4x$. f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4$ et $g'(x) = 4$. Donc f et g sont bien des primitives sur $\mathbb{R}$ de la même fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 4$.

Corrigé exercice 20 :

Notons f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 - 1$. f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = 2x$. Donc f et g sont bien des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2x$.

Corrigé exercice 21 :

1. Comme la dérivée de la fonction racine carrée est définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$, alors les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = \sqrt{x} + k$, où k est un réel.

2. Comme la dérivée de la fonction inverse est définie pour tout $x \neq 0$ par $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, alors les solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{x^2}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = \frac{1}{x} + k$, où k est un réel.

3. Comme la dérivée de la fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est donnée par $x \mapsto \frac{2}{x^3}$, on peut en déduire que les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{2}{x^3}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = -\frac{1}{x^2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 22 :

1. Comme la fonction exponentielle est sa propre primitive sur $\mathbb{R}$ alors les solutions de l'équation différentielle $y' = \mathrm{e}^x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^x + k$, où k est un réel.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{3x+1}$. f admet pour primitive la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$ donc les solutions de l'équation différentielle $y' = 3\mathrm{e}^{3x+1}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{3x+1} + k$, où k est un réel.

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2\mathrm{e}^{-x^3}$. La fonction f est de la forme $f = u'\mathrm{e}^u$ avec $u = -x^3$ de dérivée $u' = -3x^2$, donc f admet pour primitive la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^{-x^3}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3\mathrm{e}^{3x+1}$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{-x^3} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 23 :

Soient a et b des réels avec $a \neq 0$. On sait que :

- les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle ;

- les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. On est dans le cas $a = 1$ et $b = 0$ donc les solutions de $y' = y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^x$, où C est un réel.
2. On a $\frac{y'}{3} + y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{3} = -y \Leftrightarrow y' = -3y$, on est donc dans le cas $a = -3$ et $b = 0$. Les solutions de $\frac{y'}{3} + y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-3x}$, où C est un réel.
3. On a $y' - y = 1 \Leftrightarrow y' = y + 1$, on est donc dans le cas $a = b = 1$. Les solutions de $y' - y = 1$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^x - 1$, où C est un réel.
4. On a $3y' = 3y - 3 \Leftrightarrow y' = y - 1$, on est donc dans le cas $a = 1$ et $b = -1$. Les solutions de $3y' = 3y - 3$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^x + 1$, où C est un réel.

Corrigé exercice 24 :

φ est une fonction affine donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\varphi'(x) - \varphi(x) = 2 - x - 2 = -x \neq x$. La fonction φ n'est donc pas solution de l'équation différentielle $2y' = y + x$.

Corrigé exercice 25 :

φ est une fonction affine donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x)+\varphi(x) = 1+x-1 = x$. φ est donc bien une solution de l'équation différentielle $y' + y = x$. D'autre part, l'équation homogène associée à cette équation différentielle est $y' + y = 0$ dont les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, avec C réel. Par conséquent, les solutions de $y' + y = x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$, où C est un réel.

6.2 Exercices

Corrigé exercice 26 :

Dans cet exercice, on utilise le fait que $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, a pour primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Une primitive de $x \mapsto -3$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -3x$.
2. Une primitive de $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2 - \frac{1}{3}x$.
3. Une primitive de $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2}$.
4. Une primitive de $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 8$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3 + \frac{x^2}{3} - 8x$.

Corrigé exercice 27 :

f est une fonction rationnelle donc admet des primitives sur $I =]0; +\infty[$. Une primitive sur I de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et une primitive sur I de $x \mapsto -1$ est $x \mapsto -x$. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions F_k définies sur I par $F_k(x) = -\frac{1}{x} - x + k$, où$k$ est un réel. Enfin, $F_k(1) = -1 \Leftrightarrow -1 - 1 + k = -1 \Leftrightarrow k = 1$. En conclusion, pour tout $x \in I$, $F(x) = -\frac{1}{x} - x + 1$ est la primitive de la fonction f telle que $F(1) = -1$.

Corrigé exercice 28 :

La fonction exponentielle est sa propre primitive sur $\mathbb{R}$. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $F_k(x) = \mathrm{e}^x + k$, où$k$ est un réel. De plus, $F_k(0) = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 + k = \mathrm{e} \Leftrightarrow k = \mathrm{e} - 1$. En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e} - 1$ est la primitive de la fonction f telle que $F(0) = \mathrm{e}$.

Corrigé exercice 29 :

f est une fonction polynôme donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 3x^2$ est $x \mapsto x^3$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -2x$ est $x \mapsto -x^2$. Ainsi, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F_k(x) = x^3 - x^2 + k$, oùk est un réel. De plus, $F_k(1) = 2 \Leftrightarrow 1 - 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 2$. En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 - x^2 + 2$ est la primitive de la fonction f telle que $F(1) = 2$.

Corrigé exercice 30 :

1. On sait que si u est dérivable sur I alors e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$, donc $u'\mathrm{e}^u$ admet pour primitive e^u sur I. Avec quelques abus de notations, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x + 2 \times (-1) \times \mathrm{e}^{-x} = (\mathrm{e}^x)' + 2\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'$ $= (\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x})'$. Ainsi, une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x}{(x^2+3)^2}$. f est définie sur $\mathbb{R}$ car x^2+3 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 3$ alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$. Ainsi la fonction f est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ et admet donc pour primitive $-\frac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}$. Donc une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -\frac{1}{x^2+3}$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$. f est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$, alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$. Ainsi la fonction f est de la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et admet donc pour primitive $\frac{1}{2} \times \sqrt{u}$ sur $\mathbb{R}$. Donc une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$. $f(x)$ existe si, et seulement si, $x^3 - x \neq 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $x \neq -1$, $x \neq 0$ et $x \neq 1$. Ainsi, la fonction f est définie sur $I =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$. Soit u la fonction définie sur I par $u(x) = x^3 - x$, alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et donc u est dérivable sur I. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3x^2 - 1$. Ainsi la fonction f est de la forme $\frac{3u'}{u^2} = 3\frac{u'}{u^2}$ et admet donc

pour primitive $3 \times \left(-\frac{1}{u}\right)$ sur I. Donc une primitive de $x \mapsto \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$ est la fonction définie sur I par $x \mapsto -\frac{3}{x^3-x}$.

Corrigé exercice 31 :

1. f est le produit de $x \mapsto x^2$ par la composée de $x \mapsto x^3$ avec la fonction exponentielle, toutes les trois dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc f est continue sur $\mathbb{R}$. f admet donc bien des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et $u'(x) = 3x^2$. Ainsi la fonction f est de la forme $\frac{u'\mathrm{e}^u}{3}$ et admet donc pour primitives les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^3}}{3} + k$, où k est un réel. De plus, $F_k(1) = \mathrm{e} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}}{3} + k = \mathrm{e} \Leftrightarrow k = \frac{2\mathrm{e}}{3}$. La primitive F de f qui respecte la condition donnée est donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^3}+2\mathrm{e}}{3}$.
2. f est une fonction polynôme, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1-x^2$, alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et $u'(x) = -2x$. Ainsi, f est de la forme $\frac{1}{2} \times u'u^3$ et admet donc pour primitive $\frac{1}{2} \times \frac{u^{3+1}}{3+1} = \frac{u^4}{8}$. Donc les primitives de f sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = \frac{(1-x^2)^4}{8} + k$, où k est un réel. De plus, $F(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} + k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{8}$. La primitive F de f qui respecte la condition donnée est donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\left(1-x^2\right)^4-5}{8}$.

Corrigé exercice 32 :

1. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = 2$. On en déduit que les solutions de $y' = 2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 2x + k$, où k est un réel.
2. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x - x^2$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 1 - 2x$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = 1 - 2x$. On en déduit que les solutions de $y' = 1 - 2x$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = x - x^2 + k$, où k est un réel.
3. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 5x - 3$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = 5x - 3$. On en déduit que les solutions de $y' = 5x - 3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{5}{2}x^2 - 3x + k$, où k est un réel.
4. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{3} \times \left(x^3\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = x^2$. On en déduit que les solutions de $y' = x^2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{x^3}{3} + k$, où k est un réel.
5. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3+x^2+x$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 3x^2+2x+1$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = 3x^2 + 2x + 1$. On en déduit que les solutions de $y' = 3x^2 + 2x + 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = x^3 + x^2 + x + k$, où k est un réel.

6. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \frac{1}{4} \times (x^4)' = \frac{1}{4} \times 4x^3 = x^3$. Ainsi F est une solution de l'équation différentielle $y' = x^3$. On en déduit que les solutions de $y' = x^3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \frac{x^4}{4} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 33 :

La fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$ est une fonction rationnelle et est donc dérivable sur son ensemble de définition, donc sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $F'(x) = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$. Donc F est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x^3}$. Ainsi les solutions de l'équation $y' = \frac{1}{x^3}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = -\frac{1}{2x^2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 34 :

La fonction $x \mapsto x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ est la somme des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}}$. Une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto -2\sqrt{x}$. Donc, par somme, une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x}$. Ainsi, les solutions de l'équation $y' = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{x} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 35 :

1. Soit $F(x) = \frac{e^x}{2x+1}$ pour $x \in I = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. On pose $u(x) = e^x$ et $v(x) = 2x+1$ alors u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur I. De plus v ne s'annule pas sur I. Par conséquent $F = \frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $F' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $F'(x) = \frac{e^x(2x+1) - 2e^x}{(2x+1)^2} = \frac{(2x-1)e^x}{(2x+1)^2} = f(x)$. Donc F est bien une primitive de f sur I.

2. Soit $F(x) = (-6x - 14)\,e^{-0,6x} - 1,4x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors F est dérivable sur I comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur I. Et, pour tout $x \in I$, $F'(x) = -6e^{-0,6x} + (-6x-14) \times (-0,6)e^{-0,6x} - 1,4 = (-6 + 3,6x + 8,4)\,e^{-0,6x} - 1,4 = (3,6x + 2,4)\,e^{-0,6x} - 1,4 = f(x)$. Donc F est bien une primitive de f sur I.

Corrigé exercice 36 :

1. En tant que fonction polynôme f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ a pour primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, alors f a pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^3}{3} - 3 \times \frac{x^2}{2} + 5x$. Ainsi, les fonctions de la forme $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + d$, où d est un réel quelconque, sont une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. En tant que fonction polynôme f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ a pour primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, alors f a pour primitive la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -5 \times \frac{x^3}{3} + 7 \times \frac{x^2}{2} - x$. Ainsi, les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - x + d$, où d est un réel quelconque, sont une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 37 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\mathrm{e}^x$. La fonction exponentielle est sa propre primitive sur $\mathbb{R}$, donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto -\mathrm{e}^x + k$, où k est un réel. Et donc les solutions de $y' = -\mathrm{e}^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -\mathrm{e}^x + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 38 :

Pour toute fonction u définie sur I, une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.

1. Posons $f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$ et $u(x) = -2x$, on a $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -2$. Ainsi $f = u'\mathrm{e}^u$ donc f a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$. Donc les solutions de $y' = -2\mathrm{e}^{-2x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{-2x} + k$, où k est un réel.

2. Posons $f(x) = 4\mathrm{e}^{-5x}$ et $u(x) = -5x$, on a $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -5$. Ainsi $f = -\frac{4}{5}u'\mathrm{e}^u$ donc f a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto -\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-5x}$. Donc les solutions de $y' = 4\mathrm{e}^{-5x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-5x} + k$, où k est un réel.

3. Posons $f(x) = -2\mathrm{e}^{6x-7}$ et $u(x) = 6x-7$, on a $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 6$. Ainsi $f = -\frac{1}{3}u'\mathrm{e}^u$ donc f a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{6x-7}$. Donc les solutions de $y' = -2\mathrm{e}^{6x-7}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{6x-7} + k$, où k est un réel.

4. Posons $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $u(x) = -x^2$, on a $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -2x$. Ainsi $f = -\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u$ donc f a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. Donc les solutions de $y' = x\mathrm{e}^{-x^2}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 39 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1$. f est une fonction polynôme, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$, et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -1$ est $x \mapsto -x$. Ainsi, les solutions de $y' = x - 1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F_k(x) = \frac{x^2}{2} - x + k$, avec k réel. De plus, $F_k(1) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 1 + k = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$. Donc, la solution de $y' = x - 1$ vérifiant la condition initiale est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 40 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x + 1$. f est une fonction polynôme, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -x$ est $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$. Ainsi, les solutions de $y' = x^2 - x + 1$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F_k(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + k$, où k est un réel. De plus, $F_k(0) = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Donc, la solution de $y' = x^2 - x + 1$ vérifiant la condition initiale est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$.

Corrigé exercice 41 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$. f est une fonction rationnelle, elle admet donc des primitives sur son ensemble de définition $\mathbb{R}^*$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de

$x \mapsto x^3$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4}$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Ainsi, les solutions de $y' = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions $F_k(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + k$, où k est un réel. De plus, $F_k(1) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + k = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = 1$. Donc, la solution de $y' = x^3 + x + \frac{1}{x^2}$ vérifiant la condition initiale est la fonction définie pour tout $x > 0$ par $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + 1$.

Corrigé exercice 42 :

L'équation différentielle peut se réécrire $y' = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^5}$. Ainsi, les solutions de cette équation sont les fonctions, définies pour tout $x < 0$, par $F_k(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} + k$, où k est un réel. De plus, $F_k(-1) = 1 \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + k = 1 \Leftrightarrow k = -2$. Donc, la solution de $y' = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^5}$ vérifiant la condition initiale est la fonction définie pour tout $x < 0$ par $F(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{2x^4} - 2$.

Corrigé exercice 43 :

Soit a un réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

1. $y' - \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y$, on est donc dans le cas où $a = \frac{1}{2}$. Ainsi les solutions de $y' - \frac{1}{2}y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, où C est un réel.
2. $2y' - 3y = 8y + 4y' \Leftrightarrow 2y' = -11y \Leftrightarrow y' = -\frac{11}{2}y$, on est donc dans le cas où $a = -\frac{11}{2}$. Ainsi les solutions de $2y' - 3y = 8y + 4y'$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{11x}{2}}$, où C est un réel.
3. $5y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{5}y$, on est donc dans le cas où $a = -\frac{3}{5}$. Ainsi les solutions de $5y' + 3y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{3x}{5}}$, où C est un réel.
4. $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}y' = \sqrt{2}y \Leftrightarrow y' = -\frac{2\sqrt{2}}{3}y$, on est donc dans le cas où $a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ainsi les solutions de $-\frac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 44 :

Soit a un réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$, où C est un réel.

1. $y' + \sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow y' = -\sqrt{2}y$, on est donc dans le cas où $a = -\sqrt{2}$. Ainsi les solutions de $y' + \sqrt{2}y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F\left(\sqrt{2}\right) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-2} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\mathrm{e}^{-2}} = \mathrm{e}^2$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} = \mathrm{e}^{2-\sqrt{2}x}$.
2. $2y' - 3y = 2y + 3y' \Leftrightarrow y' = -5y$, on est donc dans le cas où $a = -5$. Ainsi les solutions de $2y' - 3y = 2y + 3y'$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-5x}$, où C est une constante réelle. On détermine C tel que $F(0) = 5 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 = 5 \Leftrightarrow C = 5$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = 5\mathrm{e}^{-5x}$.

3. $\frac{1}{2}y'+y=\frac{1}{2}y-y' \Leftrightarrow \frac{3}{2}y'=-\frac{1}{2}y \Leftrightarrow y'=-\frac{1}{3}y$, on est donc dans le cas où $a=-\frac{1}{3}$. Ainsi les solutions de $\frac{1}{2}y'+y=\frac{1}{2}y-y'$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$, où C est une constante réelle. On détermine C tel que $F(3)=\frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{3}{3}}=\mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow C=1$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $F(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$.

Corrigé exercice 45 :

Soit a et b deux réels, a non nul. Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$, avec C une constante réelle.

1. $2y'-y=2 \Leftrightarrow 2y'=y+2 \Leftrightarrow y'=\frac{1}{2}y+1$, on est donc dans le cas où $a=\frac{1}{2}$ et $b=1$. Donc les solutions de $2y'-y=2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2$, où C est un réel.

2. $\sqrt{2}y'=\sqrt{6}y-1 \Leftrightarrow y'=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y'=\sqrt{3}y-\frac{1}{\sqrt{2}}$, on est donc dans le cas où $a=\sqrt{3}$ et $b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc les solutions de $\sqrt{2}y'=\sqrt{6}y-1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}+\frac{\sqrt{6}}{6}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 46 :

Soit a et b deux réels, a non nul. Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$, où C est un réel.

1. $2y'+3y=3y'-2y+3 \Leftrightarrow y'=5y-3$, on est donc dans le cas où $a=5$ et $b=-3$. Donc les solutions de $2y'+3y=3y'-2y+3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{5x}+\frac{3}{5}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F\left(\frac{1}{5}\right)=-\frac{2}{5} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{5\times\frac{1}{5}}+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5} \Leftrightarrow C\mathrm{e}=-1 \Leftrightarrow C=-\mathrm{e}^{-1}$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $F(x)=-\mathrm{e}^{-1}\times\mathrm{e}^{5x}+\frac{3}{5}=-\mathrm{e}^{5x-1}+\frac{3}{5}$.

2. $2y'-3y=2y-3y'+5 \Leftrightarrow 5y'=5y+5 \Leftrightarrow y'=y+1$, on est donc dans le cas où $a=b=1$. Donc les solutions de $2y'-3y=2y-3y'+5$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{x}-1$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(0)=1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{0}-1=1 \Leftrightarrow C=2$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $F(x)=2\mathrm{e}^{x}-1$.

3. $3y'-3y=2y'-2y+\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow y'=y+\mathrm{e}^2$, on est donc dans le cas où $a=1$ et $b=\mathrm{e}^2$. Donc les solutions de $3y'-3y=2y'-2y+\mathrm{e}^2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^2$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(2)=2\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2=2\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^2=3\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow C=3$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $F(x)=3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^2$.

Corrigé exercice 47 :

Soit a un réel non nul et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y'=ay+f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=C\mathrm{e}^{ax}+\varphi(x)$, avec C une constante réelle et φ une solution particulière de (E). Or, φ est une fonction affine donc $\mathcal{D}_{\varphi'}=\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=3$. D'où, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)+3\varphi(x)=3+9x-3=9x$, et φ est donc bien solution de (E). Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x)=Ce^{-3x}+3x-1$, avec C réel.

Corrigé exercice 48 :

Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx + p$, avec m et p deux réels. Alors $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m$. φ est solution de $(E) \Leftrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\varphi'(x) - \varphi(x) = 2x \Leftrightarrow 2m - mx - p = 2x$. On résout alors le système $\begin{cases} -m = 2 \\ 2m - p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} m = -2 \\ p = 2m = -4 \end{cases}$, et on en déduit que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = -2x - 4$ est solution de l'équation (E). Or, si a est un réel non nul et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} + \varphi(x)$, avec C une constante réelle et φ une solution particulière de (E). On en déduit que les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2x - 4$, où C est un réel. Enfin, on détermine C tel que $F(0) = -2 \Leftrightarrow C - 4 = -2 \Leftrightarrow C = 2$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2x - 4$.

Corrigé exercice 49 :

φ est une fonction polynôme du second degré donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -2x - 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) - 3\varphi(x) = -2x - 1 + 3x^2 + 3x + 3 = 3x^2 + x + 2$ et donc φ est bien solution de l'équation différentielle. Or, si a est un réel non nul et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} + \varphi(x)$, où C est un réel et φ une solution particulière de l'équation. On en déduit que les solutions de l'équation $y' - 3y = x^2 + x + 2$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{3x} - x^2 - x - 1$, où C est un réel.

Corrigé exercice 50 :

Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels. Alors $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2ax + b$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 4x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 4x^2 - 2x + 1$. On résout alors le système $\begin{cases} 2a = 4 \\ 2a + 2b = -2 \\ b + 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$, et on en déduit que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2x^2 - 3x + 2$ est solution de (E). Or, si a est un réel non nul et f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} + \varphi(x)$, où C est un réel et φ une solution particulière de l'équation. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-2x} + 2x^2 - 3x + 2$, où C est un réel. Enfin, on détermine C tel que $F(0) = 4 \Leftrightarrow C + 2 = 4 \Leftrightarrow C = 2$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = 2e^{-2x} + 2x^2 - 3x + 2$.

Corrigé exercice 51 :

φ est le produit de $x \mapsto x$, fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto -x$, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$, donc

$\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x \times (-1) \times \mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + \varphi(x) = (1-x+x)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$. φ est donc bien solution de (E). Comme les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel, on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = (x+C)\,\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 52 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx\mathrm{e}^{2x}$, avec m un réel à déterminer. φ est le produit de $x \mapsto mx$, fonction affine, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m\mathrm{e}^{2x} + mx \times 2 \times \mathrm{e}^{2x} = (2mx+m)\,\mathrm{e}^{2x}$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi'(x) - 2\varphi(x) = 2\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow (2mx+m)\,\mathrm{e}^{2x} - 2mx\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow m\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow m = 2$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^{2x}$. Comme les solutions de l'équation homogène associée $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel, on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (2x+C)\,\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel. Enfin, on détermine C tel que $F(0) = -1 \Leftrightarrow (2 \times 0 + C)\,\mathrm{e}^{0} = -1 \Leftrightarrow C = -1$. Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{2x}$.

Corrigé exercice 53 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x}$, où$a$, b et c sont des réels à déterminer. φ est le produit d'une fonction trinôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{2x} + 2(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x} = (2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c)\,\mathrm{e}^{2x}$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, $2\varphi'(x) - 3\varphi(x) = (x^2+5x+3)\mathrm{e}^{2x} \Leftrightarrow (ax^2 + (4a+b)x + 2b + c)\,\mathrm{e}^{2x} = (x^2+5x+3)\,\mathrm{e}^{2x}$. On résout le système suivant $\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 5 \\ 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 - 4a = 1 \\ 2b + c = 3 - 2b = 1 \end{cases}$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{2x}$. L'équation homogène associée à (E) est $2y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}} + (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 54 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ax^2\mathrm{e}^{-x}$, avec a réel à déterminer. φ est le produit d'une fonction trinôme dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto -x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2ax\mathrm{e}^{-x} - ax^2\mathrm{e}^{-x} = (-ax^2+2ax)\,\mathrm{e}^{-x}$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi'(x) + \varphi(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow (-ax^2+2ax+ax^2)\,\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow 2ax\mathrm{e}^{-x} = 2x\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow a = 1$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$. L'équation homogène associée à (E) est $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = (x^2+C)\,\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(-1) = 1 \Leftrightarrow (1+C)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\mathrm{e}} - 1$.

Ainsi, la solution à l'équation différentielle respectant la condition précisée est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x^2 + \frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right) \mathrm{e}^{-x}$.

Corrigé exercice 55 :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (ax^2 + bx)\mathrm{e}^{-2x}$, où a et b sont des réels à déterminer. φ est le produit d'une fonction trinôme dérivable sur $\mathbb{R}$, avec la composée de la fonction affine $x \mapsto -2x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2ax + b)\mathrm{e}^{-2x} - 2(ax^2 + bx)\mathrm{e}^{-2x} = \left(-2ax^2 + (2a - 2b)x + b\right) \mathrm{e}^{-2x}$. Ainsi, φ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow \left(-2ax^2 + (2a - 2b)x + b + 2ax^2 + 2bx\right) \mathrm{e}^{-2x} = (2x + 1)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow$ $(2ax + b)\, \mathrm{e}^{-2x} = (2x + 1)\, \mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$. Donc φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = (x^2 + x)\, \mathrm{e}^{-2x}$. L'équation homogène associée à (E) est $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = (x^2 + x + C)\, \mathrm{e}^{-2x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 56 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ est une fonction trinôme définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 2x - 2 = 6x - 2$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' = 6x - 2$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 3f(x) = 6x - 2 + 9x^2 - 6x + 3 = 9x^2 + 1$, donc f est aussi solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 9x^2 + 1$.

Corrigé exercice 57 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4\mathrm{e}^{5x}$ est de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C et a sont deux réels, solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' = 5y$.

7 Exercices d'entraînement partie 1

Corrigé exercice 58 :

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 1$ est une fonction polynôme et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = x^2 + x - 1 \neq x^2 + x + 1$. Donc F n'est pas une primitive sur $\mathbb{R}$ de f.

Corrigé exercice 59 :

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. On étudie donc le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ pour en déduire les variations de F. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $x + 2$. Ainsi $F'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2$. Donc F est décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $]-2; +\infty[$. On en déduit que la courbe de F est $\mathcal{C}_2$.

Corrigé exercice 60 :

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x\mathrm{e}^x$est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de la fonction affine $x \mapsto x$ avec la fonction exponentielle, toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x$. Ainsi, F est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = (x+1)\,\mathrm{e}^x$.

Corrigé exercice 61 :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, a pour primitive sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ainsi :

1. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 2020x + k$, où k est un réel.
2. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + k$, où k est un réel.
3. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 2x + k$, où k est un réel.
4. Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - x + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 62 :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, a pour primitive sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ainsi :

1. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + k$, où k est un réel.
2. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 2x + k$, où k est un réel.
3. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{4} + \frac{2x^2}{5} - \frac{5x}{6} + k$, où k est un réel.

4. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{4} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 63 :

1. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -6\sqrt{x} + k$, où k est un réel.

2. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{2}{x} + k$, où k est un réel.

3. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + k$, où k est un réel.

4. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{3x-2}{x^3} = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 64 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ est une fonction rationnelle définie pour $x \neq -2$. Cette fonction est dérivable, et donc continue sur I et admet donc des primitives sur I. Pour tout $x \in I$, $f(x) = (x+2)' \times g' \circ (x+2)$, où g est la fonction inverse. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{1}{x+2} + k$, où k est un réel.

2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{(x+3)^2}$ est une fonction rationnelle définie pour $x \neq -3$. Cette fonction est dérivable, et donc continue sur I et admet donc des primitives sur I. Pour tout $x \in I$, $f(x) = -2 \times (x+3)' \times g' \circ (x+3)$, où g est la fonction inverse. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{2}{x+3} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 65 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{(x^2+2)^3}$ est une fonction rationnelle définie sur $I = \mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable, donc continue sur I et admet donc des primitives sur I. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2} \times (x^2+2)' \times g' \circ (x^2+2)$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{4(x^2+2)^2} + k$, où k est un réel.

2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}$ est une fonction rationnelle définie pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$. Cette fonction est dérivable, donc continue sur I et admet donc des primitives sur I. Pour tout $x \in I$, $f(x) = (x^3-1)' \times g' \circ (x^3-1)$, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto -\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}$. Ainsi, les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{3(x^3-1)^3} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 66 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction constante par la composée d'une fonction affine avec la fonction exponentielle, donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = 2x$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = 2$. Ainsi $f = u' \times \mathrm{e}^u$ admet pour primitive e^u. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + k$, où k est un réel.

2. La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{1-3x}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ comme composée d'une fonction affine par la fontion exponentielle, donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = 1 - 3x$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = -3$. Ainsi $f = -\frac{1}{3} \times u' \times \mathrm{e}^u$ admet pour primitive $-\frac{1}{3} \times \mathrm{e}^u$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{1-3x}}{3} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 67 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = -x\mathrm{e}^{x^2-1}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction trinôme par la fontion exponentielle, donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = x^2 - 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = 2x$. Ainsi $f = -\frac{1}{2} \times u' \times \mathrm{e}^u$ admet pour primitive $-\frac{1}{2} \times \mathrm{e}^u$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{x^2-1}}{2} + k$, où k est un réel.

2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$, comme quotient de la fonction exponentielle par la composée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + 1$ par la fonction carré, et dont le dénominateur $(\mathrm{e}^x + 1)^2$ ne s'annule pas sur I. Donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi $f = \frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\frac{1}{u}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{\mathrm{e}^x+1} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 68 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$ comme quotient d'une fonction affine par la composée de la fonction trinôme $x \mapsto x^2 + 1$ par la fonction racine carrée, et dont le dénominateur $\sqrt{x^2+1}$ ne s'annule pas sur I. Donc f est continue sur I et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = x^2 + 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$. Ainsi $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $\sqrt{u}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto \sqrt{x^2+1} + k$, où k est un réel.

2. La fonction f définie par $f(x) = -\frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}$ est définie et dérivable sur I comme quotient d'une fonction trinôme par la composée de la fonction trinôme $x \mapsto x^3 + 1$ par la fonction racine carrée, et dont le dénominateur $\sqrt{x^3+1}$ ne s'annule pas sur I.

Donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x) = x^3+1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = 3x^2$. Ainsi $f = -\frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $-2\sqrt{u}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -2\sqrt{x^3+1}+k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 69 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$. Soient $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$ et $u(x) = 2x$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2$. Donc $f = \frac{3}{2}u'\mathrm{e}^u$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies par $x \mapsto \frac{3}{2}\mathrm{e}^{u(x)} + c_1$, où$c_1$ est un réel, c'est-à-dire $x \mapsto \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} + c_1$ où c_1 est un réel.

Corrigé exercice 70 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$. Soient $f(x) = \frac{4x^5}{\sqrt{x^6+2}}$ et $u(x) = x^6+2$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$, comme fonction polynôme, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > 0$ et $u'(x) = 6x^5$. Donc $f = \frac{4}{6}\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies par $x \mapsto \frac{2}{3}\times 2\sqrt{u(x)}+k$, avec k réel, c'est-à-dire $x \mapsto \frac{4}{3}\sqrt{x^6+2}+k$, où k est un réel. Ainsi, Guillaume a pu dériver, par exemple, la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{4\sqrt{x^6+2}}{3}$.

Corrigé exercice 71 :

1. La fonction f définie par $f(x) = x^3 - 2x$ est une fonction polynôme définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$, donc f est continue et admettant des primitives sur I. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^4}{3} - x^2 + k$, où k est un réel. On détermine maintenant k tel que $F(0) = 2 \Leftrightarrow k = 2$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2$.

2. La fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{x^2} + x - 1$ est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $I =]0;+\infty[$, donc f est continue et admet des primitives sur I. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} - x + k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2} - 1 + k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -1$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2} - x - 1$.

Corrigé exercice 72 :

1. La fonction f définie par $f(x) = -x^3+x^2-x+1$ est une fonction polynôme définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$, donc f est continue et admet des primitives sur I. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(1) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 + k = \frac{1}{12} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$. Ainsi,$F$ est définie sur I par $F(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$.

2. La fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - x + \frac{1}{2}$ est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $I =]-\infty;0[$, donc f est continue et admet des primitives sur I. Les primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + k$, où k est un réel. On détermine maintenant k tel que $F(-1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -1$. Ainsi,$F$ est définie sur I par $F(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1$.

Corrigé exercice 73 :

1. La fonction $x \mapsto 1$ admet pour primitive $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ admet pour primitive $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$. Donc les primitives de la fonction $1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$sur $I=]0;+\infty[$ sont les fonctions $x \mapsto x-\sqrt{x}+k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(2)=-\sqrt{2} \Leftrightarrow 2-\sqrt{2}+k=-\sqrt{2} \Leftrightarrow k=-2$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x)=x-\sqrt{x}-2$.

2. Les primitives de $x \mapsto 3\mathrm{e}^x$ sur $I=\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto 3\mathrm{e}^x+k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(1)=\mathrm{e} \Leftrightarrow 3\mathrm{e}^1+k=\mathrm{e} \Leftrightarrow k=-2\mathrm{e}$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x)=3\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}$.

Corrigé exercice 74 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est définie et dérivable sur $I=\mathbb{R}$ comme somme de la composée de la fonction affine $x \mapsto 2x$ par la fonction exponentielle, et de la composée de la fonction affine $x \mapsto -\frac{x}{2}$ par la fonction $x \mapsto 2\mathrm{e}^x$, toutes définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue et admet des primitives sur I. Soient $u(x)=2x$ et $v(x)=-\frac{x}{2}$. On a $\mathcal{D}_{u'}=I=\mathcal{D}_{v'}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x)=2$ et $v'(x)=-\frac{1}{2}$. Alors $f=\frac{1}{2} \times u'\mathrm{e}^u-4 \times v'\mathrm{e}^v$ admet pour primitive $\frac{1}{2}\mathrm{e}^u-4\mathrm{e}^v$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}-4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+k$, où k est un réel. On détermine maintenant k tel que $F(0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^0}{2}-4\mathrm{e}^0+k=\frac{1}{2} \Leftrightarrow k=4$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}-4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+4$.

2. La fonction f définie par $f(x)=2x\left(x^2+1\right)^3$ est définie et dérivable sur $I=\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. Donc f est continue et admet des primitives sur I. Soit $u(x)=x^2+1$. Alors $\mathcal{D}_{u'}=I$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x)=2x$. Donc $f=u'u^3$ admet pour primitive $\frac{u^4}{4}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(0)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}+k=\frac{3}{4} \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x)=\frac{\left(x^2+1\right)^4}{4}+\frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 75 :

Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

1. La fonction f définie par $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^3}$ est définie et dérivable sur $I=\mathbb{R}$ en tant que quotient de la composée de $x \mapsto 2x$ par la fonction exponentielle, par la composée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}+1$ par la fonction cube, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit $u(x)=\mathrm{e}^{2x}+1$. On a $\mathcal{D}_{u'}=I$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x)=2\mathrm{e}^{2x}$. Donc $f=\frac{1}{2}\frac{u'}{u^3}$ admet pour primitive $-\frac{1}{4u^2}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{4\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}+k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(0)=-\frac{1}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{4\left(\mathrm{e}^0+1\right)^2}+k=-\frac{1}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{16}+k=-\frac{1}{16} \Leftrightarrow k=0$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x)=-\frac{1}{4\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.

2. La fonction f définie par $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ est définie et dérivable sur $I=\mathbb{R}$ en tant que quotient de la fonction affine $x \mapsto 2x$ par la composée de la fonction trinôme

$x \mapsto 2x^2+1$, strictement positive par la fonction racine carrée, dont le dénominateur $\sqrt{2x^2+1}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit $u(x) = 2x^2+1$. On a alors $\mathcal{D}_{u'} = I$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = 4x$. Donc $f = \frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{u} = \sqrt{u}$. Les primitives de f sur I sont donc les fonctions $x \mapsto \sqrt{2x^2+1}+k$, où k est un réel. On détermine k tel que $F(2) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2 \times 2^2 + 1} + k = 2 \Leftrightarrow 3 + k = 2 \Leftrightarrow k = -1$. Ainsi, F est définie sur I par $F(x) = \sqrt{2x^2+1} - 1$.

Corrigé exercice 76 :

Le signe de f donne les variations de g donc $g' = f$. Autrement dit : g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 77 :

Le signe de g donne les variations de f donc $f' = g$. Autrement dit : f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Corrigé exercice 78 :

Soit F une primitive de f sur I alors on a $F' = f$. Par lecture graphique, $f(x)$ est positive sur $]-3;-0,5[$ et négative sur $]-0,5;2[$. On en déduit que F est strictement croissante sur $]-3;-0,5[$ et strictement décroissante sur $]-0,5;2[$.

Corrigé exercice 79 :

1. Faux car les variations de f dépendent du signe de sa dérivée f' et non du signe d'une de ses primitives. Prenons un contre-exemple : Soit la fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(x) = -x^2+1$. Alors F est positive et dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout $x \in [0;1]$, $F'(x) = -2x$ qui est strictement décroissante sur cet intervalle.

2. Vrai car si F est décroissante et dérivable sur I alors, pour tout $x \in I$, $F'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0$, puisque $F' = f$.

3. Faux car f est une primitive de F sur I si, et seulement si, f est dérivable sur I et $f' = F$.Ici, c'est F qui est une primitive de f.

4. Vrai car, par définition, F est une primitive de f sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et $F' = f$.

5. Vrai car $(F+k)' = F'$

Corrigé exercice 80 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{(a+b)x^2-2ax+a}{x^2(x-1)^2}$ donc $\begin{cases} a+b=0 \\ -2a=2 \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}$.

2. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car le dénominateur ne s'annule qu'en 0 et en 1, donc f est continue et admet des primitives sur I. On sait d'une part que $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ a pour primitive $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur I. D'autre part, posons pour

tout $x \in I$, $v(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ et $u(x) = x - 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $u'(x) = 1$. Et donc $v = \frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\frac{1}{u}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 81 :

1. Pour tout $x \in I$, $a + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{ax^2-2ax+a+b}{(x-1)^2}$ donc $\begin{cases} a = 1 \\ -2a = -2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

2. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car son dénominateur ne s'annule qu'en 1, donc f est continue et admet des primitives sur I. Or $x \mapsto 1$ a pour primitive $x \mapsto x$ sur I. D'autre part, posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ et $u(x) = x - 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ donc $v = -\frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $\frac{1}{u}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto x + \frac{1}{x-1} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 82 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax + b + \frac{c}{(x+2)^2} = \frac{ax^3+(4a+b)x^2+(4a+4b)x+4b+c}{(x+2)^2}$.

   Donc $\begin{cases} a = 2 \\ 4a + b = 9 \\ 4a + 4b = 12 \\ 4b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 - 4a = 1 \\ 4 \times 2 + 4 \times 1 = 12 \\ c = 2 - 4b = -2 \end{cases}$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{(x+2)^2}$.

2. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car son dénominateur ne s'annule qu'en -2), donc f est continue et admet des primitives sur I. Or $x \mapsto 2x + 1$ a pour primitive $x \mapsto x^2 + x$. D'autre part, posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = -\frac{2}{(x+2)^2}$ et $u(x) = x + 2$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ donc $v = -2\frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $\frac{2}{u}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto x^2 + x + \frac{2}{x+2} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 83 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$ donc $(x^2-4)^2 = (x-2)^2(x+2)^2$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2} = \frac{(a+b)x^2+(4a-4b)x+4a+4b}{(x^2-4)^2}$ donc $\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a - 4b = 1 \\ 4a + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a = -b \\ -4b - 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{1}{8} \end{cases}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{8(x-2)^2} - \frac{1}{8(x+2)^2}$.

3. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car le dénominateur ne s'annule qu'en -2 et en 2, donc f est continue et admet des primitives sur I. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \frac{1}{8(x-2)^2} = \frac{1}{8} \times (x-2)^{-2}$ et $u(x) = x - 2$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ donc $v = \frac{1}{8}\frac{u'}{u^2}$ admet pour primitive $-\frac{1}{8u}$. On raisonne de même pour déterminer que $x \mapsto \frac{1}{8(x+2)}$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{8(x+2)^2}$. Par conséquent, f admet pour primitive $x \mapsto -\frac{1}{8(x-2)} + \frac{1}{8(x+2)} = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right) = -\frac{1}{2(x^2-4)}$ sur I. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{2(x^2-4)} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 84 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$ donc $(x^2-1)^3 = (x-1)^3(x+1)^3$.
2. Pour tout $x \in I$, $\frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x+1)^3} = \frac{(a+b)x^3+(3a-3b)x^2+(3a+3b)x+3a-3b}{(x^2-1)^3}$ donc

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a-3b=0 \\ 3a+3b=3 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2(x-1)^3} + \frac{1}{2(x+1)^3}$.

3. f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur I, car son dénominateur ne s'annule qu'en –1 et en 1, donc f est continue et admet des primitives sur I. Posons, pour tout $x \in I$, $v(x) = \frac{1}{2(x-1)^3}$ et $u(x) = x - 1$. Alors $\mathcal{D}_{u'} = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 1$ donc $v = \frac{1}{2}\frac{u'}{u^3}$ a pour primitive $-\frac{1}{4u^2}$. On raisonne de même pour déterminer que $x \mapsto -\frac{1}{4(x+1)^2}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2(x+1)^3}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) + k$, où k est un réel.

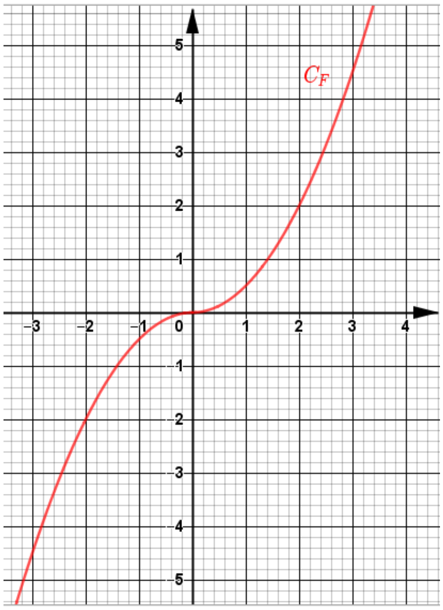
Corrigé exercice 85 :

1. Soit $x \in I$. $\frac{1}{2}\left((x+1)^2 + (x-1)^2\right) = \frac{1}{2}(x^2+2x+1+x^2-2x+1) = \frac{1}{2}(2x^2+2)$ $= x^2 + 1$.
2. D'après la question 1, on a, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)^2} + \frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2}\right)$. Or $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ donc $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$. On a ainsi, pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur I par $x \mapsto -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) + k$, où k est un réel.

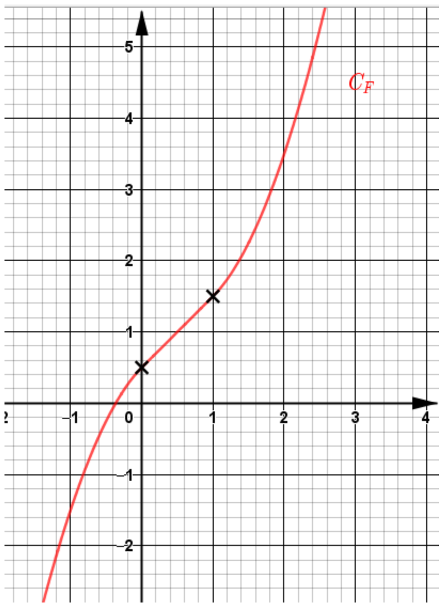
Corrigé exercice 86 :

1. L'équation s'écrit $y' = x$ sur $[0;+\infty[$ et $y' = -x$ sur $]-\infty;0]$. Les solutions de $y' = x$ sur $I = [0;+\infty[$ sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$, où k est un réel. Et les solutions de $y' = -x$ sur $J =]-\infty;0[$ sont les fonctions définies sur J par $x \mapsto -\frac{x^2}{2} + k'$, où k' est un réel. La condition initiale $F(0) = 0$ impose $k = k' = 0$.

On a donc $F(x) = \frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant 0$ et $F(x) = -\frac{x^2}{2}$ si $x \leqslant 0$. La courbe représentative de cette fonction est la suivante.



2. Sur $I_1 =]-\infty; 0]$, l'équation s'écrit $y' = -2x + 1$ a pour solutions les fonctions définies sur I_1 par $x \mapsto -x^2 + x + k_1$, où k_1 est un réel ; Sur $I_2 = [0; 1]$, l'équation s'écrit $y' = 1$ a pour solutions les fonctions définies sur I_2 par $x \mapsto x + k_2$, où k_2 est un réel ; Sur $I_3 = [1; +\infty[$, l'équation s'écrit $y' = 2x - 1$ a pour solutions les fonctions définies sur I_3 par $x \mapsto x^2 - x + k_3$, où k_3 est un réel. On cherche F telle que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. On a donc $\frac{1}{2} + k_2 = 1 \Leftrightarrow k_2 = \frac{1}{2}$. Et donc $F(0) = 0 + k_1 = 0 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k_1 = \frac{1}{2}$, et $F(1) = 1^2 - 1 + k_3 = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k_3 = \frac{3}{2}$. D'où la fonction Fcherchée est définie par $F(x) = -x^2 + x + \frac{1}{2}$ si $x \leqslant 0$, $F(x) = x + \frac{1}{2}$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $F(x) = x^2 - x + \frac{3}{2}$ si $x \geqslant 1$. La courbe représentative de cette fonction est la suivante.



Corrigé exercice 87 :

1. Pour tout $x \neq 0$, l'équation s'écrit $y' = -\frac{1}{x^2}$ de solutions $x \mapsto \frac{1}{x} + k$, où k est un réel.
2. Pour tout $x > 0$, l'équation s'écrit $y' = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ de solutions $x \mapsto -2\sqrt{x} + k$, où k est un réel.
3. Pour tout $x \neq 0$, l'équation s'écrit $y' = 3\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$ de solutions $x \mapsto -\frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} + k$, où k est un réel.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation s'écrit $y' = -\mathrm{e}^{-x}$ de solutions $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + k$, où k est un réel.

Corrigé exercice 88 :

1. Si on pose $z = y'$, on a alors $z' = y''$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $y'' = -4x+3$ est équivalente à l'équation $z' = -4x + 3$.
2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z' = -4x + 3$ sont les fonctions définies par $x \mapsto -2x^2 + 3x + k_1$, où k_1 est un réel.
3. Enfin, on résout l'équation $y' = -2x^2+3x+k_1$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont les fonctions définies par $x \mapsto -\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.

Corrigé exercice 89 :

1. On pose $z = y'$, on a alors $z' = y''$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $y'' = 2x - 1$ est équivalente à l'équation $z' = 2x-1$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z' = 2x-1$ sont les fonctions définies par $x \mapsto x^2 - x + k_1$, où k_1 est un réel. Enfin, on résout l'équation $y' = x^2 - x + k_1$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont les fonctions définies par $x \mapsto \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.
2. En posant $z = y'$, on a que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation $y'' = \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ est équivalente à $z' = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ de solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions définies par $x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + k_1$, où k_1 est un réel. On résout alors $y' = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + k_1$, où k_1 est un réel, et on obtient que les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies par $x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.
3. Pour tout $x \neq 0$, $x^3y'' = -2 \Leftrightarrow y'' = -\frac{2}{x^3} \Leftrightarrow z' = -\frac{2}{x^3}$, en posant $z = y'$. Les solutions, pour tout $x \neq 0$, de cette équation sont les fonctions définies par $x \mapsto \frac{1}{x^2} + k_1$, où k_1 est un réel. On résout alors l'équation $y' = \frac{1}{x^2} + k_1$, où k_1 est un réel. Les solutions de cette équation pour $x \neq 0$ sont les fonctions définies par $x \mapsto -\frac{1}{x} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x}y'' = 4 \Leftrightarrow y'' = 4\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow z' = 4\mathrm{e}^{-2x}$, en posant $z = y'$. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies par $x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x} + k_1$, où k_1 est un réel. On résout alors l'équation $y' = -2\mathrm{e}^{-2x} + k_1$ où k_1 est un réel. En conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions définies par $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x} + k_1x + k_2$, où k_1 et k_2 sont des réels.

Corrigé exercice 90 :

1. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{x-1}$. Alors f est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions de références, et on a, pour tout $x \in I$, $f'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)\sqrt{x-1} + (ax^3 + bx^2 + cx + d) \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $= \frac{7ax^3+(5b-6a)x^2+(3c-4b)x+d-2c}{2\sqrt{x-1}}$. Ainsi f est solution de (E) si, et seulement si, $f'(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2x^3+2x^2+2x+2}{2\sqrt{x-1}}$. D'où $\begin{cases} 7a = 2 \\ 5b - 6a = 2 \\ 3c - 4b = 2 \\ d - 2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{26}{35} \\ c = \frac{58}{35} \\ d = \frac{186}{35} \end{cases}$. Donc la fonction f définie sur I par $f(x) = \left(\frac{2}{7}x^3 + \frac{26}{35}x^2 + \frac{58}{35}x + \frac{186}{35}\right)\sqrt{x-1}$ est solution de l'équation (E).

2. Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto f(x) + k$, où k est un réel.

8 Exercices d'entraînement partie 2

Corrigé exercice 91 :

Faux car $2y' + 3y \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$.

Corrigé exercice 92 :

Faux sauf si $b = 0$. Un contre-exemple : l'équation $y' = y + 1$ n'admet pas pour solution la fonction $x \mapsto 0$.

Corrigé exercice 93 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$f'(x) = 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = 1 + x$. Donc f est bien solution de $y' + y = x + 1$ et l'affirmation est vraie.

Corrigé exercice 94 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{3}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{2}{3}$. Les solutions de $3y' + 2y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}$, où C est un réel.

2. $\frac{5}{3}y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{5}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{3}{5}$. Les solutions de $\frac{5}{3}y' - y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{3}{5}x}$, où C est un réel.

3. $4y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{4}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{3}{4}$. Les solutions de $4y' + 3y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x}$, où C est un réel.

4. $\sqrt{2}y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = \sqrt{2}y$, on est donc dans le cas $a = \sqrt{2}$. Les solutions de $\sqrt{2}y' - 2y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 95 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, avec a réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, avec C constante réelle. Ainsi :

1. $2y' = 3y \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{3}{2}$. Les solutions de $2y' = 3y$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$, où C est un réel.

2. $-y' = \frac{3}{2}y \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{3}{2}$. Les solutions de $-y' = \frac{3}{2}y$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$, où C est un réel.

3. $-2y' = \frac{1}{3}y \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{6}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{1}{6}$. Les solutions de $-2y' = \frac{1}{3}y$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}$, où C est un réel.

4. $5y' = \sqrt{5}y \Leftrightarrow y' = \frac{\sqrt{5}}{5}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Les solutions de $5y' = \sqrt{5}y$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{5}}{5}x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 96 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$, on est donc dans le cas $a = 3$. Les solutions de $y' - 3y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{3x}$, où C est un réel. On détermine maintenant C tel que $y(0) = 2 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 = 2 \Leftrightarrow C = 2$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.

2. $y' + 4y = 0 \Leftrightarrow y' = -4y$, on est donc dans le cas $a = -4$. Les solutions de $y' + 4y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-4x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y(0) = -4 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 = -4 \Leftrightarrow C = -4$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -4\mathrm{e}^{-4x}$.

Corrigé exercice 97 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $2y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{3}{2}$. Les solutions de $2y' + 3y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y(2) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\times 2} = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-3} = 1 \Leftrightarrow C = \mathrm{e}^3$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} = \mathrm{e}^{3-\frac{3}{2}x}$.

2. $5y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{5}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{2}{5}$. Les solutions de $5y' - 2y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{2}{5}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y(5) = \mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\times 5} = \mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^2 = \mathrm{e} \Leftrightarrow C = \mathrm{e}^{-1}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{\frac{2}{5}x} = \mathrm{e}^{\frac{2}{5}x-1}$.

Corrigé exercice 98 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $\sqrt{3}y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}y \Leftrightarrow y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}y$, on est donc dans le cas $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Les solutions de $\sqrt{3}y' + y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}} = \frac{1}{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^3} \Leftrightarrow C = \mathrm{e}^{-2}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x} = \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}x}{3}-2}$.

2. $y' - \pi^2 y = 0 \Leftrightarrow y' = \pi^2 y$, on est donc dans le cas $a = \pi^2$. Les solutions de $y' - \pi^2 y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\pi^2 x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\pi^2\times\frac{1}{\pi}} = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\pi} = \pi \Leftrightarrow C = \pi\mathrm{e}^{-\pi}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \pi\mathrm{e}^{-\pi} \times \mathrm{e}^{\pi^2 x} = \pi\mathrm{e}^{\pi^2 x - \pi}$.

Corrigé exercice 99 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. $\sqrt{2}y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\sqrt{2}y$, on est donc dans le cas $a = -\sqrt{2}$. Les solutions de $\sqrt{2}y' + 2y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow C = \mathrm{e}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} = \mathrm{e}^{1-\sqrt{2}x}$.

2. $2\pi y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2\pi}y$, on est donc dans le cas $a = \frac{1}{2\pi}$. Les solutions de $2\pi y' - y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{x}{2\pi}}$, où C est un réel. On détermine C tel que $y(\pi) = -2\mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2\pi}} = -2\mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -2\mathrm{e} \Leftrightarrow C = -2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \times \mathrm{e}^{\frac{x}{2\pi}} = -2\mathrm{e}^{\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2}} = -2\mathrm{e}^{\frac{x+\pi}{2\pi}}$.

Corrigé exercice 100 :

Les solutions de $y' = 2y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel. Pour chaque courbe, on lit l'ordonnée du point d'abscisse 0 qui correspond donc à $y(0) = C$. Pour $\mathcal{C}_1$, on a $y(0) = 2$ donc $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_1(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$; Pour $\mathcal{C}_2$, on a $y(0) = 1$ donc $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_2(x) = \mathrm{e}^{2x}$; Pour $\mathcal{C}_3$, on a $y(0) = 0$ donc $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_3(x) = 0$; Pour $\mathcal{C}_4$, on a $y(0) = -\frac{1}{2}$ donc $\mathcal{C}_4$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_4(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$; Pour $\mathcal{C}_5$, on a $y(0) = -1$ donc $\mathcal{C}_5$ est la courbe représentative de la fonction définie par $y_5(x) = -\mathrm{e}^{2x} = -y_2(x)$.

Corrigé exercice 101 :

Les solutions de l'équation $y' = ay$, où a est un réel non nul, sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. Ainsi :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, on est donc dans le cas $a = \frac{1}{2}$. Ainsi f est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}$, on est donc dans le cas $a = \sqrt{2}$. Ainsi f est une solution de l'équation différentielle $y' = \sqrt{2}y$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\mathrm{e}^{3-2x} = 2\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-2x}$, on est donc dans le cas $a = -2$. Ainsi f est une solution de l'équation différentielle $y' = -2y$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \pi\mathrm{e}^{\pi+x} = \pi\mathrm{e}^{\pi} \times \mathrm{e}^{x}$, on est donc dans le cas $a = 1$. Ainsi f est une solution de l'équation différentielle $y' = y$.

Corrigé exercice 102 :

Faux car $y' - 4y \Leftrightarrow y' = 4y$. Cette équation admet pour solutions sur $\mathbb{R}$ les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{4x}$, où C est un réel. La fonction F solution de $y' - 4y = 0$ qui prend la valeur x_0 en y_0 vérifie donc $C\mathrm{e}^{4x_0} = y_0 \Leftrightarrow C = \frac{y_0}{\mathrm{e}^{4x_0}} = y_0\mathrm{e}^{-4x_0}$ d'où $F(x) = y_0\mathrm{e}^{-4x_0} \times \mathrm{e}^{4x} = y_0\mathrm{e}^{4(x-x_0)} \neq y_0 + \mathrm{e}^{4(x-x_0)}$.

Corrigé exercice 103 :

Vrai. En effet, si pour tout réel x, $y(x) = 0$ alors, pour tout réel x, $y'(x) = 0$ et on a bien $y' = ay$.

Corrigé exercice 104 :

Faux : la limite des solutions $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est un réel non nul et $a > 0$, dépend du signe de C. En effet, par limite d'une composée, en posant $t = ax$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{ax} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$, car $a > 0$. Donc, par limite d'un produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} C\mathrm{e}^{ax} = +\infty$ si $C > 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} C\mathrm{e}^{ax} = -\infty$ si $C < 0$.

Corrigé exercice 105 :

Prenons, par exemple, $C = 0$. On obtient alors la fonction $x \mapsto \frac{2}{3}$, qui n'est pas solution de l'équation $3y' - 2y = 1$ puisque $3 \times 0 - 2 \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \neq 1$. Donc cette affirmation est fausse.

Corrigé exercice 106 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $3y' - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{3}y - 1$, on est donc dans le cas $a = \frac{2}{3}$ et $b = -1$. On en déduit que les solutions de $3y' - 2y + 3 = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{2x}{3}} + \frac{3}{2}$, où C est un réel.

2. $y' + y = 2y' - y + 1 \Leftrightarrow y' = 2y - 1$, on est donc dans le cas $a = 2$ et $b = -1$. On en déduit que les solutions de $y' + y = 2y' - y + 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 107 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $2y' - \sqrt{2}y = 3y' - 2\sqrt{2}y + \sqrt{2} \Leftrightarrow y' = \sqrt{2}y - \sqrt{2}$, on est donc dans le cas $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$. On en déduit que les solutions de $2y' - \sqrt{2}y = 3y' - 2\sqrt{2}y + \sqrt{2}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\sqrt{2}x} + 1$, où C est un réel.

2. $4y' + \sqrt{3}y = 5y' + 3\sqrt{3}y - \sqrt{3} \Leftrightarrow y' = -2\sqrt{3}y + \sqrt{3}$, on est donc dans le cas $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$. On en déduit que les solutions de $4y' + \sqrt{3}y = 5y' + 3\sqrt{3}y - \sqrt{3}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2\sqrt{3}x} + \frac{1}{2}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 108 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $2y' + 2\pi y = y' - \pi y - \pi \Leftrightarrow y' = -3\pi y - \pi$, on est donc dans le cas $a = -3\pi$ et $b = -\pi$. On en déduit que les solutions de $2y' + 2\pi y = y' - \pi y - \pi$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-3\pi x} - \frac{1}{3}$, où C est un réel.

2. $2\mathrm{e}y' + y = \mathrm{e}y' - y + \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{\mathrm{e}}y + \mathrm{e}$, on est donc dans le cas $a = -\frac{2}{\mathrm{e}}$ et $b = \mathrm{e}$. On en déduit que les solutions de $2\mathrm{e}y' + y = \mathrm{e}y' - y + \mathrm{e}^2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}x} + \frac{\mathrm{e}^2}{2}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 109 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $y' - 2y = 1 \Leftrightarrow y' = 2y + 1$, on est donc dans le cas $a = 2$ et $b = 1$. On en déduit que les solutions de $y' - 2y = 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(0) = 2 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow C = \frac{5}{2}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}$.

2. $2y' - y = 3y' + y - 1 \Leftrightarrow y' = -2y + 1$, on est donc dans le cas $a = -2$ et $b = 1$. On en déduit que les solutions de $2y' - y = 3y' + y - 1$ sont les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(0) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^0 + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 110 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $3y' - 3y = 2y' + 2y - 5 \Leftrightarrow y' = 5y - 5$, on est donc dans le cas $a = 5$ et $b = -5$. On en déduit que les solutions de $3y' - 3y = 2y' + 2y - 5$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{5x} + 1$, où C est un réel. On détermine C tel que $F\left(\frac{1}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{5\times\frac{1}{5}} + 1 = 0 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^1 + 1 = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{\mathrm{e}} = -\mathrm{e}^{-1}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{5x} + 1 = -\mathrm{e}^{5x-1} + 1$.

2. $y - y' = 3y' + 2y + 4 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y - 1$, on est donc dans le cas $a = -\frac{1}{4}$ et $b = -1$. On en déduit que les solutions de $y - y' = 3y' + 2y + 4$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} - 4$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(4) = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{4}{4}} - 4 = 1 \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-1} = 5 \Leftrightarrow C = 5\mathrm{e}^1$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 5\mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} - 4 = 5\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}+1} - 4$.

Corrigé exercice 111 :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

1. $\pi y' - 2y = 2y - \pi y' + \pi \Leftrightarrow y' = \frac{2}{\pi}y + \frac{1}{2}$, on est donc dans le cas $a = \frac{2}{\pi}$ et $b = \frac{1}{2}$. On en déduit que les solutions de $\pi y' - 2y = 2y - \pi y' + \pi$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{\frac{2x}{\pi}} - \frac{\pi}{4}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(\pi) = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{\pi}} - \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow C\mathrm{e}^2 = \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow C = \frac{5\pi}{4}\mathrm{e}^{-2}$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5\pi}{4}\mathrm{e}^{-2} \times \mathrm{e}^{\frac{2x}{\pi}} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\mathrm{e}^{\frac{2x}{\pi}-2} - \frac{\pi}{4}$.
2. $\mathrm{e}y' + 2y = y - 2\mathrm{e}y' + \mathrm{e} \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{3\mathrm{e}}y + \frac{1}{3}$, on est donc dans le cas $a = -\frac{1}{3\mathrm{e}}$ et $b = \frac{1}{3}$. On en déduit que les solutions de $\mathrm{e}y' + 2y = y - 2\mathrm{e}y' + \mathrm{e}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{3\mathrm{e}}} + \mathrm{e}$, où C est un réel. On détermine C tel que $F(3\mathrm{e}) = 2\mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{e}}{3\mathrm{e}}} + \mathrm{e} = 2\mathrm{e} \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e} \Leftrightarrow C = \mathrm{e}^2$. Ainsi, la solution de l'équation différentielle respectant la condition initiale est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{3\mathrm{e}}} + \mathrm{e} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{3\mathrm{e}}+2} + \mathrm{e}$.

Corrigé exercice 112 :

Vrai. En effet, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3}$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times 3\mathrm{e}^{3x} = 6\mathrm{e}^{3x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3f(x) + 1 = 3\left(2\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{3}\right) + 1 = 6\mathrm{e}^{3x} = f'(x)$. Donc f est bien solution de l'équation $y' = 3y + 1$.

Corrigé exercice 113 :

Faux car si F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = y_0\mathrm{e}^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$ alors $F(x_0) = y_0\mathrm{e}^{a(x_0-x_0)} - \frac{b}{a} = y_0 - \frac{b}{a} \neq y_0$.

Corrigé exercice 114 :

Vrai. En effet, $y' + y = 1 \Leftrightarrow y' = -y + 1$. On est donc dans le cas d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -1$ et $b = 1$. Donc les solutions de $y' + y = 1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + 1$ où C est un réel. La solution F qui prend la valeur 2 en 0 vérifie donc $C + 1 = 2 \Leftrightarrow C = 1$ et est donc définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$. Enfin, par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$ donc, par limite d'une somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = +\infty$.

Corrigé exercice 115 :

Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + f$ s'obtiennent en additionnant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée $y' = ay$, c'est-à-dire aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = mx + p$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ car la fonction φ est affine. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m$. Ainsi φ est solution de $2y' + y = x + 1$ si, et seulement si,$2\varphi' + \varphi = x + 1 \Leftrightarrow 2m + mx + p = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ 2m + p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ p = 1 - 2m = -1 \end{cases}$.
Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x - 1$ est une solution particulière de l'équation $2y' + y = x + 1$. D'autre part, comme l'équation homogène associée

$2y'+y=0 \Leftrightarrow y'=-\frac{1}{2}y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $2y'+y=x+1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+x-1$, où C est un réel.

2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=mx+p$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi=\mathcal{D}_{\varphi'}=\mathbb{R}$ car la fonction φ est affine. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=m$. Ainsi φ est solution de $y'+3y=2x-1$ si, et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\Leftrightarrow m+3mx+3p=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases}3m=2\\ m+3p=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\frac{2}{3}\\ p=\frac{-1-m}{3}=-\frac{5}{9}\end{cases}$.
Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\frac{2}{3}x-\frac{5}{9}$ est une solution particulière de l'équation $y'+3y=2x-1$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y'+3y=0 \Leftrightarrow y'=-3y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{-3x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y'+3y=2x-1$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{-3x}+\frac{2}{3}x-\frac{5}{9}$, où C est un réel.

3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi=\mathcal{D}_{\varphi'}=\mathbb{R}$ car la fonction φ est une fonction trinôme. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=2ax+b$. Ainsi φ est solution de l'équation $y'-3y=-3x^2-x-2$ si, et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)-3\varphi(x)=-3x^2-x-2$
$\Leftrightarrow 2ax+b-3ax^2-3bx-3c=-3x^2-x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}-3a=-3\\ 2a-3b=-1\\ b-3c=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=1\end{cases}$.
Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=x^2+x+1$ est une solution particulière de l'équation $y'-3y=-3x^2-x-2$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y'-3y=0 \Leftrightarrow y'=3y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{3x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y'-3y=-3x^2-x-2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{3x}+x^2+x+1$, où C est un réel.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi=\mathcal{D}_{\varphi'}=\mathbb{R}$ car la fonction φ est une fonction trinôme. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=2ax+b$. Ainsi φ est solution de l'équation $2y'-3y=3x^2-x-2$ si, et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2\varphi'(x)-3\varphi(x)=3x^2-x-2$
$\Leftrightarrow 4ax+b-3ax^2-3bx-3c=3x^2-x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}-3a=3\\ 4a-3b=-1\\ 2b-3c=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=-1\\ c=0\end{cases}$.
Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=-x^2-x$ est une solution particulière de l'équation $2y'-3y=3x^2-x-2$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $2y'-3y=0 \Leftrightarrow y'=\frac{3}{2}y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $2y'-3y=3x^2-x-2$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{\frac{3x}{2}}-x^2-x$, où C est un réel.

Corrigé exercice 116 :

Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y'=ay+f$ s'obtiennent en additionnant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée $y'=ay$, c'est-à-dire aux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (mx+p)\mathrm{e}^{-2x}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m\mathrm{e}^{-2x} - 2(mx+p)\mathrm{e}^{-2x} = (-2mx+m-2p)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Ainsi φ est solution de l'équation $y' + 3y = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + 3\varphi(x) = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow (-2mx+m-2p+3mx+3p)\,\mathrm{e}^{-2x} = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$ $\Leftrightarrow (mx+m+p)\,\mathrm{e}^{-2x} = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m+p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ p = 0 \end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 3y = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-3x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + 3y = (2+2x)\mathrm{e}^{-2x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-3x} + 2x\mathrm{e}^{-2x}$,où C est un réel.

2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (mx+p)\mathrm{e}^{x}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m\mathrm{e}^{x} + (mx+p)\mathrm{e}^{x} = (mx+m+p)\,\mathrm{e}^{x}$. Ainsi, φ est solution de l'équation $y' + y = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + \varphi(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$ $\Leftrightarrow (2mx+m+2p)\,\mathrm{e}^{x} = (3-2x)\mathrm{e}^{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -2 \\ m+2p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ p = 2 \end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)\mathrm{e}^{x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + y = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + y = (3-2x)\mathrm{e}^{x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + (2-x)\mathrm{e}^{x}$, où C est un réel.

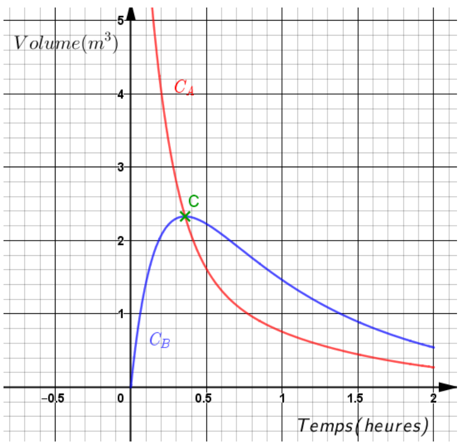
3. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{-x} - (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x} = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi φ est solution de l'équation $y' - 2y = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) - 2\varphi(x) = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow (-3ax^2+(2a-3b)x+b-3c)\,\mathrm{e}^{-x} = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -3 \\ 2a-3b = -1 \\ b-3c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation $y' - 2y = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y' - 2y = -(3x^2+x+2)\mathrm{e}^{-x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x} + (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$, où C est un réel.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x}$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_{\varphi'} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{2x} + 2(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x} = (2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)\,\mathrm{e}^{2x}$. Ainsi la fonction φ

est solution de l'équation $y'+2y=-\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$ si, et seulement si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi'(x)+2\varphi(x)=-\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}\Leftrightarrow\left(4ax^2+(2a+4b)x+b+4c\right)\mathrm{e}^{2x}=\left(-2x^2+x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=-2\\2a+4b=1\\b+4c=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{2}\\c=-\frac{1}{4}\end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de l'équation $y'+2y=-\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y'+2y=0\Leftrightarrow y'=-2y$ a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$, où C est un réel, alors les solutions de l'équation $y'+2y=-\left(2x^2-x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x\mapsto C\mathrm{e}^{-2x}+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}$, où C est un réel.

Corrigé exercice 117 :

1. a. $f(0)=A(0)+2B(0)=10$ et $g(0)=-2A(0)+B(0)=-20$.
   b. Comme A et B sont dérivables sur $I=[0;+\infty[$ alors, par produit et somme, f et g sont aussi dérivables sur I. Et, pour tout $t\in I$, $f'(t)=A'(t)+2B'(t)=-5A(t)+2B(t)+4A(t)-4B(t)=-A(t)-2B(t)$. Ainsi, pour tout $t\in I$, $f'(t)=-f(t)$ donc f est solution de l'équation différentielle $y'=-y$. De même, pour tout $t\in I$, $g'(t)=-6g(t)$ donc g est solution de l'équation différentielle $y'=-6y$.
   c. L'équation $y'=-y$ a pour solutions sur I les fonctions définies par $t\mapsto C\mathrm{e}^{-t}$, où C est un réel. De plus, $f(0)=10\Leftrightarrow C=10$ donc, pour tout $t\geqslant 0$, $f(t)=10\mathrm{e}^{-t}$. De même, l'équation $y'=-6y$ a pour solutions sur I les fonctions définies par $t\mapsto C\mathrm{e}^{-6t}$, où C est un réel. De plus, $g(0)=-20\Leftrightarrow C=-20$ donc pour tout $t\geqslant 0$, $g(t)=-20\mathrm{e}^{-6t}$.
   d. On a $\begin{cases}A+2B=f\\-2A+B=g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5A=f-2g\\5B=2f+g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{5}(f-2g)\\B=\frac{1}{5}(2f+g)\end{cases}$. D'où, pour tout $t\geqslant 0$, $A(t)=2\left(\mathrm{e}^{-t}+4\mathrm{e}^{-6t}\right)$ et $B(t)=4\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-6t}\right)$.
2. Les courbes représentatives de A et B sur $[0;2]$ sont les suivantes.



L'abscisse de leur point d'intersection C est $t\approx 0,36$. De plus, $A(0,36)\approx 2,329$. On en déduit que les deux cuves contiendront environ le même volume de gaz, environ égal à 2,329 m3, au bout d'environ 0,36 h (soit environ 21 minutes et 36 secondes).

9 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 118 :

Soit $(E_0) : y' = ay$ une équation différentielle où a est un réel non nul.

1. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_0). Alors y_1 et y_2 sont dérivables sur I et donc leur somme $y_1 + y_2$ l'est aussi. Et, pour tout $x \in I$, $(y_1 + y_2)'(x) = y_1'(x) + y_2'(x) = ay_1(x) + ay_2(x)$, car y_1 et y_2 sont solutions de (E_0), d'où, pour tout $x \in I$, $(y_1 + y_2)'(x) = a(y_1(x) + y_2(x)) = a(y_1 + y_2)(x)$. La fonction $y_1 + y_2$ est donc aussi une solution de (E_0).

2. Soient y une solution de (E_0) et k un réel. Alors y est dérivable sur I et donc le produit ky l'est aussi. Et, pour tout $x \in I$, $(ky)'(x) = ky'(x) = kay(x)$, car y est solution de (E_0), d'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(ky)'(x) = a(ky)(x)$. La fonction ky est donc aussi une solution de (E_0).

Corrigé exercice 119 :

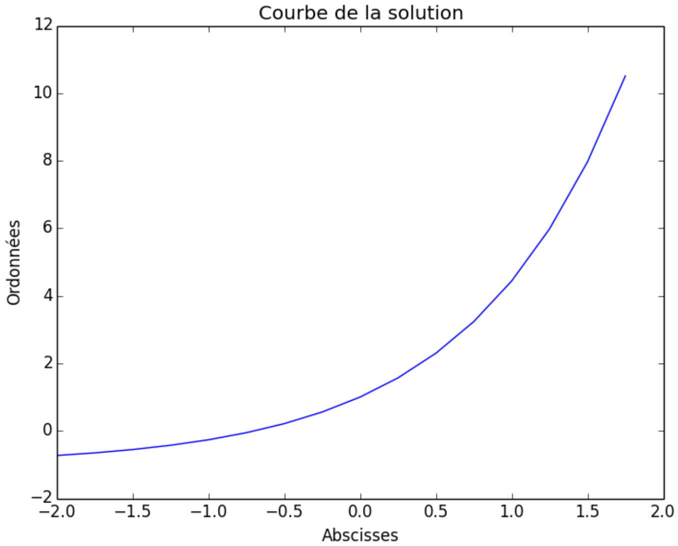
Soient $(E) : y' = ay + f$ une équation différentielle où $a \neq 0$ et f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit φ une fonction dérivable sur I. On suppose que φ est une solution particulière de (E), on a donc $\varphi' = a\varphi + f$. Soit g une fonction dérivable sur I et solution de (E) : alors $g' = ag + f$. Comme g et φ sont dérivables sur I alors $g - varphi$ l'est aussi. Et on a, pour tout $x \in I$, $(g - \varphi)'(x) = g'(x) - \varphi'(x) = ag(x) + f(x) - a\varphi(x) - f(x) = a(g(x) - \varphi(x))$, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $(g - \varphi)'(x) = a(g - \varphi)(x)$. Ainsi $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$.
Réciproquement, si $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$ alors $g = g - \varphi + \varphi$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I. On a alors, pour tout $x \in I$, $g'(x) = (g - \varphi)'(x) + \varphi'(x) = a(g - \varphi)(x) + a\varphi(x) + f(x)$, car $g - \varphi$ est solution de $y' = ay$ et φ est solution de $\varphi' = a\varphi + f$. Ainsi $g'(x) = ag(x) + f(x)$ et la fonction g est bien solution de (E).

Corrigé exercice 120 :

1.
```
#Solution de y'=ay+b qui prend la valeur y_0 en x_0
def solution(x):
    y=(y_0+b/a)*exp(a*(x-x_0))-b/a
    return y
```

2.
```
#Coordonnées des points de la fonction solution sur [-2;2]
abs=[i*0.01 for i in range(-200,200,25)]
ord=[solution(k) for k in abs]
```

On obtient, par exemple, la courbe ci-dessous pour $y' = y + 1$, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.



Corrigé exercice 121 :

1. Par le théorème fondamental de la dynamique, on a, pour tout $t \geqslant 0$, $ma(t) = mg - kv(t) \Leftrightarrow mv'(t) = mg - kv(t) \Leftrightarrow v'(t) = g - \frac{k}{m}v(t)$, car $m \neq 0$. Par conséquent, v est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -\frac{k}{m}y + g$.

2. (E) est de la forme $y' = ay + b$ de solutions $t \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle. On est dans le cas où $a = -\frac{k}{m}$, $b = g$ et donc $\frac{b}{a} = -\frac{mg}{k}$. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}$, où C est un réel. De plus, la vitesse initiale de l'objet est nulle, donc $v(0) = 0 \Leftrightarrow C + \frac{mg}{k} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{mg}{k}$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{kt}{m}}\right)$.

Corrigé exercice 122 :

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (f(x))^2$: f est bien solution de (E).

2. Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur cet intervalle. Alors, pour tout $x \in I$, $g'(x) = (g(x))^2 \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{(g(x))^2} = 1$, en divisant chaque membre par $(g(x))^2 \neq 0$. Donc g est solution de (E) si, et seulement si, g est solution de l'équation différentielle $\frac{y'}{y^2} = 1$.

3. $\frac{y'}{y^2} = 1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{y(x)} = x + k$ où k est un réel et pour $x \neq -k$. Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions définies avec $k \in \mathbb{R}$ et pour $x \neq -k$ par $y(x) = -\frac{1}{x+k}$.

4. On détermine k tel que $y(0) = 1 \Leftrightarrow k = -1$. Ainsi, la solution cherchée est la fonction définie pour $x \neq 1$ par $x \mapsto -\frac{1}{x-1}$.

Corrigé exercice 123 :

1. a. On sait que $f(0) = 1$. De plus, comme f est une solution de (E), on a $f'(0) = f(0) + 1 = 2$. L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par : $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

   b. Pour tout $x \in [0;1]$, $\varphi(x) = 2x + 1$. Le point A_0 a pour coordonnées $(0;\varphi(0))$ soit $(0;1)$. Le point A_1 a pour coordonnées $(1;\varphi(1))$ soit $(1;3)$. (Voir courbe plus loin.)

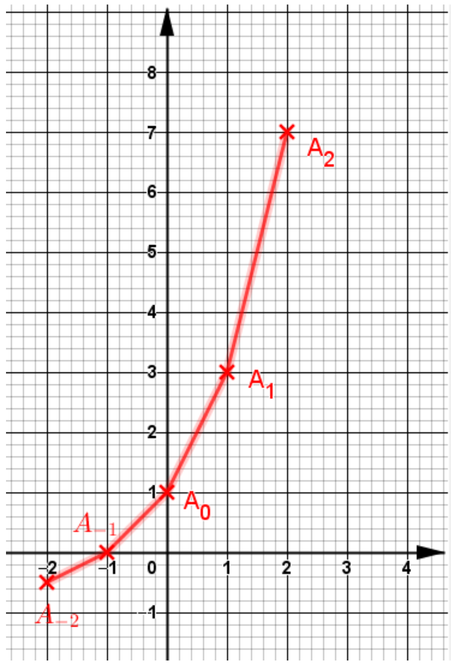
2. a. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est donnée par $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. En utilisant le fait que $f'(1) = f(1) + 1$ (car f est une solution de (E)) et l'approximation $f(1) \approx \varphi(1) = 3$, on obtient : $y = (f(1)+1)(x-1) + f(1) \approx (\varphi(1)+1)(x-1) + \varphi(1) = 4(x-1) + 3 = 4x - 1$.

   b. La question précédente permet de déduire, l'expression de $\varphi(x)$: pour tout $x \in [1;2]$, $\varphi(x) = 4x - 1$. Comme $\varphi(2) = 7$ on a donc $A_2(2;7)$. (Voir courbe ci-dessous.)

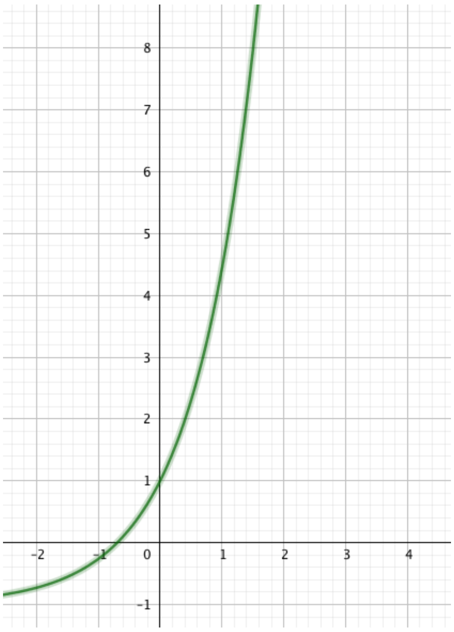
3. a. Soit n un entier compris entre -2 et 1. Soit y_n une expression de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse n. Sur l'intervalle $[n;n+1]$, $\varphi(x)$ est, par définition, égale à y_n. Donc, pour tout $x \in [n;n+1]$, on a, en utilisant le fait que f est une solution de (E) : $\varphi(x) = y_n = f'(n)(x-n) + f(n) = (f(n)+1)(x-n) + f(n) = f(n)(x+1-n) + x - n$.

   b. Le résultat précédent donne $\varphi(n) = f(n)$. Il permet également de calculer $\varphi(n+1)$: $\varphi(n+1) = f(n)(n+1+1-n) + n + 1 - n = 2f(n) + 1 = 2\varphi(n) + 1$. On obtient ainsi une relation de récurrence entre $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$.

   c. La question précédente donne $\varphi(n) = \frac{\varphi(n+1)-1}{2}$ donc :$\varphi(0) = \frac{\varphi(1)-1}{2} = 1$; $\varphi(-1) = \frac{\varphi(0)-1}{2} = 0$ et $\varphi(-2) = \frac{\varphi(-1)-1}{2} = -\frac{1}{2}$. Ce qui donne les points $A_{-1}(-1;0)$ et $A_{-2}\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. On obtient ainsi la courbe ci-dessous.



4. La fonction f est définie et dérivable sur $[-2;2]$ comme composée de la fonction exponentielle avec la fonction $x \mapsto 2x-1$, toutes deux définies et dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in [-2;2]$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^x$. Or, pour tout $x \in [-2;2]$, $f(x)+1 = 2\mathrm{e}^x - 1 + 1 = 2\mathrm{e}^x$. La fonction f est donc bien solution de l'équation différentielle $(E) : y' = y+1$. En traçant la courbe représentative de la fonction f on obtient une courbe proche de celle obtenue à la question 3, même si l'approximation n'est pas parfaite. Pour améliorer l'approximation, on pourrait considérer d'avantage de points.



Corrigé exercice 124 :

1. Comme N est dérivable et ne s'annule pas sur $I = [0;+\infty[$ alors $g = \frac{1}{N}$ est dérivable sur I. Et, pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) = -\frac{N'(t)}{(N(t))^2}$.

2. N est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $t \geqslant 0$, $N'(t) = 3N(t) - 0,005\,(N(t))^2$. En divisant les deux membres de cette égalité par $-(N(t))^2 \neq 0$, on obtient alors $-\frac{N'(t)}{(N(t))^2} = -3 \times \frac{1}{N(t)} + 0,005$, c'est-à-dire $g'(t) = -3g(t) + 0,005$. Donc g est solution de $(E') : y' = -3y + 0,005$.

3. (E') est de la forme $y' = ay + b$, $a \neq 0$, de solutions $t \mapsto C\mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a}$, où C est une constante réelle. On est dans le cas où $a = -3$, $b = 0,005$ et donc $\frac{b}{a} = -\frac{1}{600}$. Les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur I par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{600}$, où C est un réel. Puisque, pour tout $t \in I$, $g(t) = \frac{1}{N(t)} \Leftrightarrow N(t) = \frac{1}{g(t)}$, on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $t \mapsto \frac{1}{C\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{600}}$, où C est un réel, c'est-à-dire $t \mapsto \frac{600}{600C\mathrm{e}^{-3t}+1}$, où C est un réel.

4. a. On détermine C tel que $N(0) = 2000 \Leftrightarrow \frac{600}{600C+1} = 2000 \Leftrightarrow C = -\frac{7}{6000}$. La solution vérifiant la condition initiale de l'énoncé est donc définie sur I par $N(t) = \frac{600}{600\times\left(-\frac{7}{6000}\right)\mathrm{e}^{-3t}+1} = \frac{600}{-\frac{7}{10}\mathrm{e}^{-3t}+1} = \frac{6000}{10-7\mathrm{e}^{-3t}}$.

   b. Au bout de 2 heures, $N(2) = \frac{6000}{10-7\mathrm{e}^{-6}} \approx 601$ bactéries sont présentes dans l'enceinte.

Corrigé exercice 125 :

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$. Soit y un réel fixé. Alors la fonction $x \mapsto f(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction affine $x \mapsto 1x+y$ par la fonction f. La fonction $x \mapsto f(x)f(y)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une constante par la fonction f. On dérive les deux membres de l'égalité $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à x, en appliquant la formule (avec abus de notations) $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$, en prenant $a = 1$ et $b = y$. On obtient ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \times f'(1x+y) = f(y) \times f'(x) \Leftrightarrow f'(x+y) = f(y)f'(x)$. En particulier pour $x = 0$, on obtient que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f'(y) = f'(0)f(y)$. La fonction f est donc solution de $(E) : y' = f'(0)y$.

2. Les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{f(0)x}$, où C est un réel.

3. On prend $x = 0$ et $y = 0$ dans la condition $(*)$. On obtient alors que f vérifie la condition $(*)$ si, et seulement si, $f(0) = (f(0))^2 \Leftrightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0$ d'où $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

4. Si $f(0) = 0$ alors $C\mathrm{e}^{0x} = 0 \Leftrightarrow C = 0$ donc f est la fonction constante égale à 0. Si $f(0) = 1$ alors $C\mathrm{e}^{0x} = 1 \Leftrightarrow C = 1$ donc f est la fonction exponentielle. Les seules fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition $(*)$ sont la fonction nulle et la fonction exponentielle.

Corrigé exercice 126 :

1. Comme la cuve contient constamment 20 litres d'air et que x correspond à la proportion d'azote, le volume d'azote dans la cuve est donc donné, pour tout $t \geqslant 0$ par : $v(t) = 20x(t)$.

2. a. Entre t et $t + \Delta t$, il s'écoule Δt secondes. Le débit entrant d'azote est de 0.2 L·s^{-1}. Donc le volume d'azote entrant durant cette période est égal à $0,2\Delta t$ L.
   b. Le débit de sortie est identique mais la proportion d'azote dans le mélange de sortie est égale à$x(t)$. Donc le volume d'azote sortant est égal à $0,2x(t)\Delta t$ L.

3. On a $\Delta v(t) = 0,2\Delta t - 0,2x(t)\Delta t = 0,2\Delta t\,(1 - x(t))$, on en déduit donc que $\Delta x(t) = \frac{\Delta v}{20}(t) = (1 - x(t))\,\frac{0,2}{20}\Delta t = 0,01\,(1 - x(t))\,\Delta t$.

4. $\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) = 0,01\,(1 - x(t))\,\Delta t$. Donc $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = 0,01\,(1 - x(t))$. Or $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = x'(t)$ d'où x est solution de l'équation différentielle $y' = 0,01\,(1 - y)$.

5. a. Les solutions de $y' = 0,01(1 - y) \Leftrightarrow y' = -0,01y + 0,01$ sont les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0,01t} + 1$, où C est un réel. On détermine maintenant C tel que $x(0) = 0,8 \Leftrightarrow C + 1 = 0,8 \Leftrightarrow C = -0,2$. Donc, en conclusion, pour tout $t \geqslant 0$, $x(t) = 1 - 0,2\mathrm{e}^{-0,01t}$.
   b. Cinq minutes correspondent à 300 secondes. La proportion d'azote dans la cuve au bout de cinq minutes est donc environ égale à $x(300) = 1 - 0,2\mathrm{e}^{-0,01\times 300} \approx 0,990$, soit environ 99, 0 %.

Corrigé exercice 127 :

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 2y = 2x\mathrm{e}^x$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}$ où A et B sont deux réels. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x}$. De même, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = A\mathrm{e}^{-x} + 4B\mathrm{e}^{2x}$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = A\mathrm{e}^{-x} + 4B\mathrm{e}^{2x} - (-A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x}) - 2\left(A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}\right) = 0$. Donc f est bien solution de (E_0) : $y'' - y' - 2y = 0$.

2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (mx + p)\mathrm{e}^x$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = m\mathrm{e}^x + (mx + p)\mathrm{e}^x = (mx + m + p)\mathrm{e}^x$. De même, φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = m\mathrm{e}^x + (mx + m + p)\mathrm{e}^x = (mx + 2m + p)\mathrm{e}^x$. Ainsi φ est solution de (E) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) - \varphi'(x) - 2\varphi(x) = 2x\mathrm{e}^x \Leftrightarrow$ $(mx+2m+p-mx-m-p-2mx-2p)\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \begin{cases} -2m = 2 \\ m - 2p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ p = -\frac{1}{2} \end{cases}$.
   Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \left(-x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière de (E).

3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que g' soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Si g est solution de (E) alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) - g'(x) - 2g(x) = 2x\mathrm{e}^x$. Comme g, g', φ et φ' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $g - \varphi$ et $(g-\varphi)' = g' - \varphi'$ le sont aussi. Et on a $(g-\varphi)'' = g'' - \varphi''$. $(g-\varphi)''(x) - (g-\varphi)'(x) - 2(g-\varphi)(x) = g''(x) - g'(x) - 2g(x) - (\varphi''(x) - \varphi'(x) - 2\varphi(x)) = 2x\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x = 0$. $g - \varphi$ est donc bien solution de (E_0). Réciproquement, si $g - \varphi$ est solution de (E_0) alors $g = g - \varphi + \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée aussi, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) - g'(x) - 2g(x) = (g-\varphi)''(x) - (g-\varphi)'(x) - 2(g-\varphi)(x) + \varphi''(x) - \varphi'(x) - 2\varphi(x) = 0 + 2x\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x$. Donc g est solution de (E). D'où l'équivalence.

4. Les solutions de (E) sont donc les fonctions h définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x$, où$A$ et B sont des réels. Déterminons maintenant A et B sachant que $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x = -A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x} - \left(x + \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^x$. Ainsi, $h(0) = 1 \Leftrightarrow A + B - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow A + B = \frac{3}{2}$ et $h'(0) = 0 \Leftrightarrow -A + 2B - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -A + 2B = \frac{3}{2}$. On doit donc résoudre le système $\begin{cases} A + B = \frac{3}{2} \\ -A + 2B = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases}$. La solution cherchée est donc, en conclusion, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^x$.

Corrigé exercice 128 :

1. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels à déterminer. Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction trinôme, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2ax + b$. De même, φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi''(x) = 2a$. Ainsi φ est solution de(E) : $y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$ si, et seulement si, $\varphi''(x) - \varphi'(x) - 6\varphi(x) = -6x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow -6ax^2 + (-2a - 6b)x +$

$2a-b-6c=-6x^2+4x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} -6a=-6 \\ -2a-6b=4 \\ 2a-b-6c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 6b=-2a-4=-6 \\ 6c=2a-b+3=6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$. Ainsi, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=x^2-x+1$ est une solution particulière de (E).

2. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que g' soit dérivable sur $\mathbb{R}$. Si g est solution de (E) alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x)-g'(x)-6g(x)=-6x^2+4x-3$. Comme g, g', φ et φ' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $g-\varphi$ et $(g-\varphi)'=g'-\varphi'$ le sont aussi. Et on a $(g-\varphi)''=g''-\varphi''$. Et alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g-\varphi)''(x)-(g-\varphi)'(x)-6(g-\varphi)(x)=g''(x)-g'(x)-6g(x)-(\varphi''(x)-\varphi'(x)-6\varphi(x))=-6x^2+4x-3-(-6x^2+4x-3)=0$, donc $g-\varphi$ est solution de (E_0) : $y''-y'-6y=0$, l'équation homogène associée à (E). Réciproquement, si $g-\varphi$ est solution de (E_0) alors $g=g-\varphi+\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, g' aussi, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x)-g'(x)-6g(x)=(g-\varphi)''(x)-(g-\varphi)'(x)-6(g-\varphi)(x)+\varphi''(x)-\varphi'(x)-6\varphi(x)=0+(-6x^2+4x-3)=-6x^2+4x-3$. Donc g est solution de (E). D'où l'équivalence.

3. a. L'équation caractéristique associée à l'équation $y''-y'-6y=0$ est $r^2-r-6=0$. On a $r^2-r-6=0 \Leftrightarrow (r+2)(r-3)=0 \Leftrightarrow r=-2$ ou $r=3$. Donc les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x}+B\mathrm{e}^{3x}$, où A et B sont réels.

   b. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x}+B\mathrm{e}^{3x}+x^2-x+1$, où A et B sont des réels.

4. Soit $f(x)=A\mathrm{e}^{-2x}+B\mathrm{e}^{3x}+x^2-x+1$, avec A et B réels à déterminer sachant que $f(0)=1$ et $f'(0)=4$. Alors f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=-2A\mathrm{e}^{-2x}+3B\mathrm{e}^{3x}+2x-1$. D'où, $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+1=1 \\ -2A+3B-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+3B=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$. En conclusion, la solution cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{3x}+x^2-x+1$.

Corrigé exercice 129 :

1. a. La fonction constante $y : t \mapsto K$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $t \geqslant 0$, $y'(t)=0$. D'où, pour tout $t \geqslant 0$, $ay(t)\left(1-\frac{y(t)}{K}\right)=aK\left(1-\frac{K}{K}\right)=0=y'(t)$. Cette fonction est donc bien solution de (L).

   b. Si pour tout $t \geqslant 0$, $y(t)>K$ alors, pour tout $t \geqslant 0$, $\frac{y(t)}{K}>1$ donc $1-\frac{y(t)}{K}<0$ d'où $ay(t)\left(1-\frac{y(t)}{K}\right)<0$ car $a>0$ et, pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) \geqslant K>0$. On en déduit que, dans ce cas, la fonction y est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. De même, on montre que si pour tout $t \geqslant 0$, $y(t)<K$, alors la fonction y est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. a. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $z'(t)=\left(\frac{1}{y(t)}\right)'=-\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$.

b. $z' = -az + \frac{a}{K} \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = -\frac{a}{y} + \frac{a}{K} \Leftrightarrow y' = ay - y^2\frac{a}{K}$, en multipliant les deux membres de l'égalité par $-y^2$. Ainsi, cette équation est équivalente à l'équation $(L) : y' = ay\left(1 - \frac{y}{K}\right)$.

c. Les solutions de l'équation $z' = -az + \frac{a}{K}$ sont de la forme $z : t \mapsto C\mathrm{e}^{-at} + \frac{1}{K}$, où C est un réel. Ainsi, les solutions de (L) sont les fonctions de la forme $y : t \mapsto \frac{1}{C\mathrm{e}^{-at}+\frac{1}{K}}$, où C est un réel, c'est-à-dire de la forme $y : t \mapsto \frac{K}{1+KC\mathrm{e}^{-at}}$, où C est un réel.

3. a. y est de la forme $y : t \mapsto \frac{K}{1+KC\mathrm{e}^{-at}}$, où C est un réel. De plus, $y(0) = y_0$. Donc, $\frac{K}{1+KC} = y_0 \Leftrightarrow C = \frac{K-y_0}{Ky_0}$. Donc, en conclusion, pour tout $t \geqslant 0$, $y(t) = \frac{K}{1+\frac{K-y_0}{y_0}\mathrm{e}^{-at}}$.

b. Comme $a > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-at} = 0$. On obtient donc, par produit, somme puis quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = K$.

10 Préparer le bac

Corrigé exercice 130 :

1. L'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel non nul, a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle. L'équation $(E) : 2y' + y = 0$ est équivalente à $y' = -\frac{1}{2}y$ qui a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où C est un réel.

2. a. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (mx^2 + px)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine avec la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (2mx + p)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}(mx^2 + px)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \left(-\frac{m}{2}x^2 + \left(2m - \frac{p}{2}\right)x + p\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. D'où, φ est solution de (E') si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\varphi'(x)+\varphi(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow (-mx^2+(4m-p)x+2p+mx^2+px)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$. Ainsi la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est une solution particulière de l'équation (E').

   b. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si f est solution de (E') alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f'(x) + f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. Comme f et φ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $f - \varphi$ l'est aussi et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2(f - \varphi)'(x) + (f - \varphi)(x) = 2f'(x) + f(x) - (2\varphi'(x) + \varphi(x)) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$. Donc $f - \varphi$ est solution de (E). Réciproquement, si $f - \varphi$ est solution de (E) alors $2(f-\varphi)'+f-\varphi = 0 \Leftrightarrow 2f'-2\varphi'+f-\varphi = 0 \Leftrightarrow 2f'+f = 2\varphi'+\varphi = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ donc f est solution de (E'). D'où l'équivalence.

   c. D'après la question 2.b., une solution de (E') est la somme d'une solution de (E) et de φ. D'après la question 1., on en déduit que les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où C est un réel.

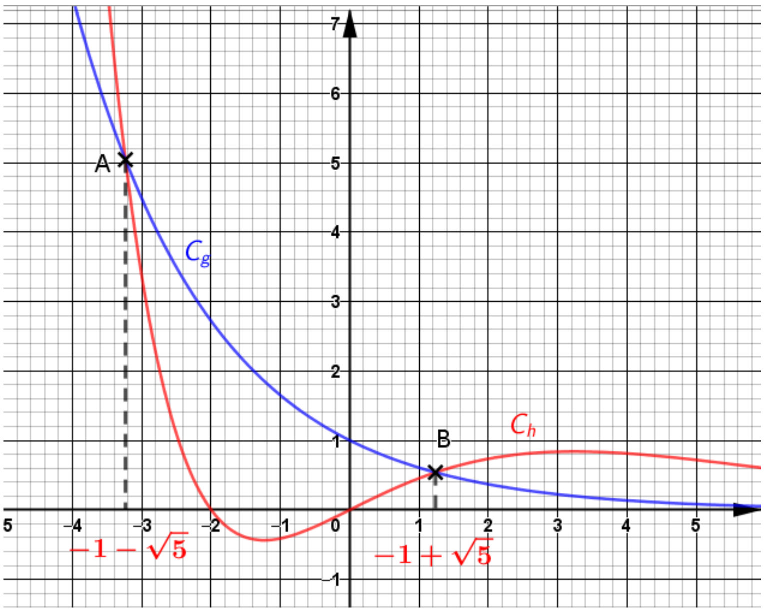
3. a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{4}(x^2+2x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{1}{4}(2x + 2)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\left(-x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. Puisque $\frac{1}{8} > 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} > 0$ alors $h'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x + 4$, soit du signe de $a = -1$ à l'extérieur de ses racines : $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$. Ainsi h est décroissante sur $\left]-\infty; 1 - \sqrt{5}\right]$ et sur $\left[1 + \sqrt{5}; +\infty\right[$, et est croissante sur $\left[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}\right]$.

   b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{4}(x^2 + 2x) = +\infty$ et, en posant $t = -\frac{x}{2}$, par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$. Ainsi, par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$. D'autre part, la limite de h en $+\infty$ est une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ». On lève l'indétermination en transformant l'écriture de $h(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^2}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} + \frac{\frac{x}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$. On pose alors $t = \frac{x}{2}$. On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} t = +\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} + \frac{t}{\mathrm{e}^t}$. Par croissances comparées, on a alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} = +\infty$ donc, par limite d'un quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = 0$. Enfin, par limite d'une composée et d'une somme,

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t} + \frac{t}{e^t} = 0.$

4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) - g(x) = \frac{1}{4}(x^2+2x-4)e^{-\frac{x}{2}}$ est du signe de x^2+2x-4, c'est-à-dire du signe de $a = 1$ à l'extérieur de ses racines : $-1-\sqrt{5}$ et $-1+\sqrt{5}$. Ainsi $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur les intervalles $\left]-\infty; -1-\sqrt{5}\right[$ et $\left]-1+\sqrt{5}; +\infty\right[$, et $\mathcal{C}_h$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $\left]-1-\sqrt{5}; -1+\sqrt{5}\right[$.

   b. On obtient les courbes ci-dessous.



Corrigé exercice 131 :

Partie A :

1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $I =]0; +\infty[$, solution de (E) : $xy' - y = x^2e^{2x}$. Soit g la fonction définie pour tout $x \in I$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Alors g est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. Et, pour tout $x \in I$, $g'(x) = \frac{f'(x) \times x - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x^2e^{2x}}{x^2} = e^{2x}$. Donc g est solution de l'équation (E') : $y' = e^{2x}$.

2. Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur I par $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} + k$, où k est un réel, donc, pour tout $x \in I$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}e^{2x} + k$, où k est un réel. Ainsi, les solutions de (E) sont les fonctions définies sur Ipar $x \mapsto \frac{x}{2}e^{2x} + kx$, avec où k est un réel.

3. On détermine k tel que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{2\times\frac{1}{2}} + \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e}{4} + \frac{k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{e}{2}$. Ainsi la fonction f cherchée est la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{e}{2}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$.

Partie B :

Pour tout pour $x \geqslant 0$, posons $h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$. Alors, pour tout $x \geqslant 0$, $h(x) = \frac{x}{2}\left(e^{2x} - e\right)$ est du signe de $e^{2x} - e$ car $\frac{x}{2} \geqslant 0$. $e^{2x} - e \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geqslant e^1 \Leftrightarrow 2x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. En conclusion, $h(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ et $h(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Et $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 132 :

1. $(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{10}y + 3$ de solutions définies sur $I = [0; +\infty[$ par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} + 30$, où C est un réel. On détermine C tel que $v(0) = 0 \Leftrightarrow C + 30 = 0 \Leftrightarrow C = -30$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $v(t) = 30\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\right)$.

2. a. La fonction v est dérivable sur $I = [0; +\infty[$ comme somme, produit et composée de fonction dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \geqslant 0$, $v'(t) = 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} > 0$. Donc v est strictement croissante sur I.

   b. Posons $x = -\frac{t}{10}$. On a alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x = -\infty$. D'où, par limite d'une composée, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Donc, par limite d'une somme puis d'un produit, $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 30$. La vitesse maximale atteinte par le cycliste est donc de 30 m·s^{-1}.

3. On a $v'(t) < 0,1 \Leftrightarrow 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} < 0,1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{t}{10}} < \frac{1}{30} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} < \ln\left(\frac{1}{30}\right) \Leftrightarrow t > -10\ln\left(\frac{1}{30}\right) \approx 34,01$. Donc au bout de 35 secondes, la vitesse du cycliste sera stabilisée.

   Remarque : si le chapitre sur la fonction logarithme népérien n'a pas encore été traitée, alors il suffit d'utiliser le tableau de valeurs réalisé à la calculatrice pour déterminer le résultat.

Corrigé exercice 133 :

1. Soient y une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $I = [0; 30]$ telle que $y(0) = 0,01$ et z la fonction définie sur I par $z = \frac{1}{y}$. Alors z est dérivable sur I et, pour tout $\in I$, $z'(t) = -\frac{y'(t)}{(y(t))^2}$. Donc y est solution de $(E) : y' = 0,05y(10 - y)$ avec $y(0) = 0,01$ si, et seulement si, pour tout $t \in I$, $z'(t) = -\frac{0,05y(t)(10-y(t))}{(y(t))^2} \Leftrightarrow z'(t) = -0,5 \times \frac{1}{y(t)} + 0,05$, c'est-à-dire $z'(t) = -0,5z(t) + 0,05$. Et donc si, et seulement si, z est solution de $(E') : z' = -0,5z + 0,05$. De plus $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 100$. D'où l'équivalence.

2. a. Les solutions de (E') sont les fonctions définies sur I par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,1$, où C est un réel. On détermine C tel que $z(0) = 100 \Leftrightarrow C + 0,1 = 100 \Leftrightarrow C = 99,9$. Ainsi, pour tout $t \in I$, $z(t) = 99,9\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,1$ et donc $y(t) = \frac{1}{99,9\mathrm{e}^{-0,5t}+0,1}$.

   b. $y(30) = \frac{1}{99,9\mathrm{e}^{-0,5\times30}+0,1} \approx 10$ donc environ 10 % de la population sera contaminé au bout d'un mois.

Corrigé exercice 134 :

1. Les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{1}{2}y = 10 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y + 10$ sont les fonctions définies sur $I = [0; +\infty[$ par $t \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$, où C est un réel. On détermine C tel que $f(0) = 220 \Leftrightarrow C + 20 = 220 \Leftrightarrow C = 200$. Ainsi, pour tout $t \in I$, $f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$.

2. a. La fonction f est dérivable sur I comme produit, somme et composée de fonctions dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $t \in I$, $f'(t) = -100\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} < 0$, car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est strictement décroissante sur I.

b. On pose $x = -\frac{t}{2}$. On a alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x = -\infty$. Et par limite d'une composée on obtient que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$. D'où, par limite d'un produit puis d'une somme, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 20$ en $+\infty$. La température minimale de l'objet après refroidissement est donc de 20 degrés celsius.

3. a. On obtient la courbe ci-dessous.

b. On lit graphiquement l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = 50$. On obtient $t \approx 3,79$. La température de l'objet atteint donc 50 degrés celsius au bout d'environ 3 heures et 47 minutes.

Corrigé exercice 135 :

1. $(E') : y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ admet pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$, où C est une constante réelle.

2. La fonction h est de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x}$, avec $C = \frac{9}{2}$: il s'agit donc bien d'une solution de (E').

3. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -3 \times (-3)\mathrm{e}^{-3x} = 9\mathrm{e}^{-3x}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)+2g(x) = 9\mathrm{e}^{-3x}+2\times(-3\mathrm{e}^{-3x}) = 9\mathrm{e}^{-3x} - 6\mathrm{e}^{-3x} = 3\mathrm{e}^{-3x}$. Donc g est bien solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}$. Alors $f = h + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = h'(x) + g'(x) + 2h(x) + 2g(x) = (h'(x) + 2h(x)) + (g'(x) + 2g(x)) = 3\mathrm{e}^{-3x}$ d'après les questions 2. et 3. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = 3\mathrm{e}^{-3x}$ et donc f est également une solution de (E).

Corrigé exercice 136 :

Par lecture graphique, on constate que la fonction f est décroissante sur $[0;+\infty[$ donc sa dérivée f' doit être négative sur $[0;+\infty[$. On en déduit que Γ est la courbe représentative de f'.
Autre méthode : La fonction f est positive puis négative donc ses primitives sont croissantes puis décroissantes, ce qui correspond à l'allure de la fonction $\mathcal{C}$.