Corrigé exercice 97 :

Partie A : Conjectures

1. La fonction f semble être croissante sur $[-4; 2]$.
2. La fonction f semble être négative sur $[-4; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire

1. Pour tout réel x, on pose $h(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-1}$, $u(x) = x+2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x-1}$.

   Les fonctions t et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x-1}$. h est de la forme $u \times v$ donc h est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $h'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x-1} + (x+2) \times \mathrm{e}^{x-1} = (x+3)\mathrm{e}^{x-1}$.

   Ainsi, comme $g(x) = h(x) - 1$ alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $g'(x) = h'(x) = (x+3)\mathrm{e}^{x-1}$.

2. Pour tout réel $x \in [-4; 2]$, on a $\mathrm{e}^{x-1} > 0$ donc $g'(x)$ est du même signe que $x+3$.

   Ainsi, g' est négative sur $[-4; -3]$ et positive sur $[-3; 2]$.

3. On obtient ainsi le tableau de variations ci-dessous.

x	-4		-3		2
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$-2\mathrm{e}^{-5}-1$	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-4}-1$	$\nearrow$	$4\mathrm{e}-1$

4. On a $-3 < \alpha < 2$. On sait que la fonction g est croissante sur $[-3; 2]$ et que $g(\alpha) = 0$.

   Ainsi, g est négative sur $[-4; \alpha]$ et positive sur $[\alpha; 2]$.

Partie C : Étude de la fonction f

1. Pour tout réel x, on pose $k(x) = x^2\mathrm{e}^{x-1}$, $w(x) = x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x-1}$.

   On a alors $w'(x) = 2x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x-1}$. k est de la forme $w \times v$, d'où $k'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{x-1} + x^2 \times \mathrm{e}^{x-1} = x(x+2)\mathrm{e}^{x-1}$.

   Or, on a $f(x) = k(x) - \dfrac{x^2}{2}$ d'où $f'(x) = k'(x) - \dfrac{2x}{2} = x(x+2)\mathrm{e}^{x-1} - x = x\left((x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 1\right)$.

2. Ainsi, pour tout réel x, on a $f'(x) = x \times g(x)$.

3. On en déduit le tableau de signes ci-dessous.

x	-4		0		α		2
Signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. Et on en déduit ainsi le tableau de variations ci-dessous.

x	-4		0		α		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$16e^{-5}-8$	↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$4e-2$

5. Le tableau de variations précédent contredit les conjectures de la partie A : f n'est pas croissante sur $[-4;2]$ puisqu'elle est décroissante sur $[0;\alpha]$ et elle n'est pas positive sur $[0;2]$ puisqu'elle est négative au moins sur $[0;\alpha]$.