Corrigé exercice 137 :

1. a. Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{5}{x+3} - 1 = \dfrac{5-(x+3)}{x+3} = \dfrac{-x+2}{x+3}$.
   Puisque $x \geqslant 0$ alors $x+3>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x+2$.
   Par conséquent $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [0;2[$.

   b. On déduit de la question précédente que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$. Le tableau de variations est donné au complet dans la question e avec les limites.

   c. Pour tout réel $x > 0$,
$$\begin{aligned} x\left(5\frac{\ln(x)}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) &= 5\ln(x) - x + 5\ln\left(\frac{x+3}{x}\right) \\ &= 5\ln(x) - x + 5\ln(x+3) - 5\ln(x) = f(x) \end{aligned}$$

   d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

   e. On calcule $f(0) = 5\ln(3)$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$5\ln(3)$ $\searrow$	$-\infty$

2. a. Sur l'intervalle $[0;+\infty[$:
   - f est continue ;
   - f est strictement croissante ;
   - $f(0) = 5\ln(3)$;
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

   Puisque $0 \in]-\infty; 5\ln(3)]$, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \ni [0;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   b. $f(14) \approx 0,16$ et $f(15) \approx -0,55$. Ainsi par continuité et stricte décroissance de f sur cet intervalle, $\alpha \in [14;15]$. À l'aide de la calculatrice on obtient $\alpha \approx 14,23$.

3. On en déduit que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0;\alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in [\alpha;+\infty[$.