Corrigé exercice 130 :

1. L'équation différentielle $y' = ay$, où a est un réel non nul, a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle. L'équation $(E) : 2y' + y = 0$ est équivalente à $y' = -\frac{1}{2}y$ qui a pour solutions les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où C est un réel.

2. a. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (mx^2 + px)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine avec la fonction exponentielle.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\varphi'(x) = (2mx + p)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}(mx^2 + px)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \left(-\frac{m}{2}x^2 + \left(2m - \frac{p}{2}\right)x + p\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$
   D'où, φ est solution de (E') si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$2\varphi'(x) + \varphi(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow (-mx^2 + (4m-p)x + 2p + mx^2 + px)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m = 1 \\ 2p = 1 \end{cases}$$
   $$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$$
   Ainsi la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est une solution particulière de l'équation (E').

   b. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Si f est solution de (E') alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f'(x) + f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. Comme f et φ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $f - \varphi$ l'est aussi et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2(f-\varphi)'(x) + (f-\varphi)(x) = 2f'(x) + f(x) - (2\varphi'(x) + \varphi(x)) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$. Donc $f - \varphi$ est solution de (E).
   Réciproquement, si $f - \varphi$ est solution de (E) alors $2(f-\varphi)' + f - \varphi = 0 \Leftrightarrow 2f' - 2\varphi' + f - \varphi = 0 \Leftrightarrow 2f' + f = 2\varphi' + \varphi = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ donc f est solution de (E'). D'où l'équivalence.

   c. D'après la question 2.b., une solution de (E') est la somme d'une solution de (E) et de φ. D'après la question 1., on en déduit que les solutions de (E') sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, où C est un réel.

3. a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{1}{4}(2x+2)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\left(-x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. Puisque $\frac{1}{8} > 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} > 0$ alors $h'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x + 4$, soit du signe de $a = -1$ à l'extérieur de ses racines : $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$. Ainsi h est décroissante sur $\left]-\infty; 1-\sqrt{5}\right]$ et sur $\left[1+\sqrt{5}; +\infty\right[$, et est croissante sur $\left[1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}\right]$.

   b. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{4}(x^2 + 2x) = +\infty$ et, en posant $t = -\frac{x}{2}$, par limite d'une composée, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$. Ainsi, par limite d'un produit $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.

D'autre part, la limite de h en $+\infty$ est une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ». On lève l'indétermination en transformant l'écriture de $h(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^2}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}} + \frac{\frac{x}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}$. On pose alors $t = \frac{x}{2}$. On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} t = +\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} + \frac{t}{\mathrm{e}^t}$. Par croissances comparées, on a alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} = +\infty$ donc, par limite d'un quotient, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} = 0$. Enfin, par limite d'une composée et d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t} + \frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$.

4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x)-g(x) = \frac{1}{4}(x^2+2x-4)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est du signe de x^2+2x-4, c'est-à-dire du signe de $a = 1$ à l'extérieur de ses racines : $-1-\sqrt{5}$ et $-1+\sqrt{5}$. Ainsi $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur les intervalles $\left]-\infty;-1-\sqrt{5}\right[$ et $\left]-1+\sqrt{5};+\infty\right[$, et $\mathcal{C}_h$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $\left]-1-\sqrt{5};-1+\sqrt{5}\right[$.

b. On obtient les courbes ci-dessous.