Corrigé exercice 104 :

1. a. Étude de la limite de g en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc, par produit par -1 puis par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Étude de la limite de g en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc, par produit puis par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$. Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. On ne peut donc pas conclure directement.Pour tout $x \neq 0$, $g(x) = 1 + x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right)$. D'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 1\right) = +\infty$. En conclusion, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   b. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et, pour tout réel x, $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. La fonction g admet donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

   D'après le tableau ci-dessus, g admet en 0 un minimum égal à 2. Donc, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 2$ d'où, pour tout réel x, $g(x) > 0$.

2. Étude de la limite de f en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$ donc,par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$. Et ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Étude de la limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$. D'autre part, d'après un théorème de croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet ensemble. Pour tout réel x, $f'(x) = 1 + \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = 1 + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^x + 1 - x\right) = \mathrm{e}^{-x} g(x)$.

4. D'après la question 1.b., pour tout réel x, $g(x) > 0$. De plus, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. La fonction f admet donc le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$

5. a. Si une fonction f est dérivable en a, alors une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Or $f'(0) = 2$ et $f(0) = 1$. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = 2(x-0)+1$ soit $y = 2x+1$.

   b. On pose, pour tout réel x, $h(x) = f(x) - (2x+1)$. On a alors : $h(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} - (2x+1) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} - x = \frac{x}{\mathrm{e}^x}(1-\mathrm{e}^x)$. Or $\mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ donc $1 - \mathrm{e}^x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. La fonction h admet donc le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$1 - \mathrm{e}^x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	0	$-$	

   Pour tout x réel, on a donc $h(x) \leqslant 0$. On en déduit que $\mathcal{C}$ est toujours située en dessous de T.